נכתב על ידי נועם יערי

דוגמה

צופים בתחרות משיכת חבל.

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \text{קבוצה 1} \\ \text{קבוצה 2} \\ \beta \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

- התפלגות המצב בזמן n
- (התפלגות סטציונרית)
- הסיכוי לניצחון של (1) בהינתן מצב תחילתי.
- תוחלת משך המשחק בהנתן מצב התחלתי.

נתון X_0. ידוע שבסופו של דבר, (1) ניצחו. מה התפלגות של X_1?

נסמן ב - A את המאורע $\overbrace{\exists n: (X_n = \alpha)}^{\text{כלומר 1 ניצחה}}$.

$$P(X_1 = \alpha | X_0 = 1) = 0.2$$

$$P(X_1 = \alpha | X_0 = (1); A)$$

$$\text{ידוע} = P\left(A \middle| X_0 = (1)\right) =$$

$$= P(A|X_0 = (1), X_1 = \alpha) \cdot P\left(X_1 \cdot \alpha \middle| X_0 = (1)\right) + P\left(A \middle| X_0 = (1), X_1 = (2)\right) \cdot P\left(X_1 = (2) \middle| X_0 = (1)\right)$$

$$= 1 \cdot 0.2 + P\left(A \middle| X_1 = (2)\right) \cdot 0.8$$

נסמן $a = P\left(A \middle| X_0 = (1)\right)$, $b = P\left(A \middle| X_0 = (2)\right)$

$$a = 0.2 + 0.8b$$

$$b = 0.8 \cdot a$$

$$\Rightarrow a = \frac{5}{9}, b = \frac{4}{9}$$

נסיון שני:

$$P(X_1 = \alpha | X_0 = (1), A) = P\left(X_1 = \alpha, A \middle| X_0 = (1)\right) =$$

$$= P\left(A \middle| X_0 = (1)\right) = \frac{P\left(X_1 = \alpha \middle| X_0 = (1)\right)}{P\left(A \middle| X_0 = (1)\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5}{9}} = \frac{9}{25}$$

שאלה נוספת על אותו גרף:

מה הסיכוי שהמשחק יסתיים לאחר מספר זוגי של צעדים? (בהנחה ש - $X_0 = 1$)

תשובה: הסיכוי ש(2) ינצחו בסופו של דבר כי הגרף מאוד סימטרי.

שאלה נוספת: כאשר הגרף לא סימטרי?

תשובה: $N:=\min_n\{X_n\in\{\alpha,\beta\}\}$, $E:=\{N=0,2,4,6,\cdots\}$.

$$P=P(E|X_0=(1),X_1=\alpha)\cdot P(X_1=\alpha|X_1=(1)+$$
$$+P\big(E\big|X_0=(1),X_1=(1)\big)\cdot P\big(X_1=(1)\big|X_0=(1)\big)+$$
$$+P\big(E\big|X_0=(1),X_1=(2)\big)\cdot P\big(X_1=(2)\big|X_0=(1)\big)=$$
$$p=0.2(1-p)+0.6(1-p),$$
$$p'=0.8(1-p)$$
$$p=p'=\frac{4}{9}$$

דוגמה נוספת

שיכור מהלך על $\mathbb{Z}$. סיכוי שווה ($\frac{1}{2}$) לזוז ימינה/שמאלה.

השיכור ממוקם ב – $X_0=1$.

השאלה: מה הסיכוי שהוא יגיע אי פעם ל – 0?

$P_m=$ הסיכוי להגיע בסופו של דבר ל – 0, בהינתן $X_0=m$. $P_0=1$.

נחשב עבור $m\geq 1$:

$$P_m=\frac{1}{2}P_{m-1}+\frac{1}{2}P_{m+1}$$
$$P_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_2\Rightarrow P_2=2P_1-1$$
$$P_2=\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_3\Rightarrow P_3=3P_1-2$$
$$P_3=\frac{1}{2}P_2+\frac{1}{2}P_4\Rightarrow P_4=4P_1-3$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow P_m=mp_1-(m-1)$$

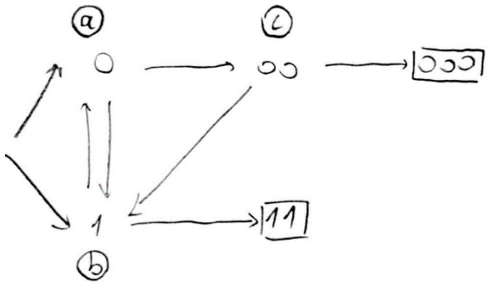
בנוסף ידוע ש – $P_m\geq 0$.

$$\Rightarrow P_1\geq\frac{m-1}{m}\Rightarrow P_1=1\Rightarrow P_m=1$$

דוגמה

מטילים מטבע הוגן שוב ושוב. מטילים עד שמופיע הרצף 000 או 11.

נבנה תהליך מרקוב עם המצבים כדלקמן:



כמה צעדים ימשך המשחק (בתוחלת)?

$$T=\min_n\{X_n\in\{000,11\}\}$$

$$a=E(T|X_0=0)$$

$$b=E(T|X_0=1)$$

$$c=E(T|X_0=00)$$

$$a=\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+1,b=\frac{1}{2}a+1,c=\frac{1}{2}b+1\Rightarrow a=\frac{18}{5},b=\frac{14}{5},c=\frac{12}{5}$$

$$E(X)=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+1=\frac{21}{5}$$

תרגיל

כתוב במדויק את תהליך מרקוב המתאר את השאלה הנ"ל (נסמן ב - $X_1,X_2,\cdots$ את סדרת הטלות המטבע. תאר את המצבים של Y_n, $3\le n$).

$$Y_n=\begin{cases}0:X_{n-1}=1,X_n=0\\00:X_{n-2}=1,X_{n-1}=X_n=0\\000:X_{n-2}=X_{n-1}=X_n=0\\1:X_{n-1}=0,X_n=1\\11:X_{n-1}=X_n=1\end{cases}$$

נכתב על ידי נועם יערי

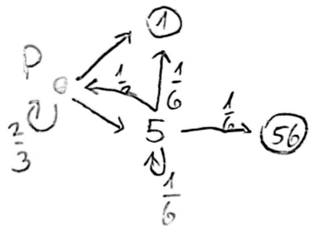
שאלה

משחקים במשחק הבא:

מטילים קובייה. אם יוצא $\overrightarrow{56}$, נצחנו. אם יוצא 1, הפסדנו.

גובים שקל עבור השתתפות במשחק. מי שזוכה מקבל 7 שקלים. האם כדאי לשחק?

נחשב את הסיכוי לנצח.



חשוב לזהות סימטריות!

$$p = \frac{2}{3}p + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}p'$$
$$p' = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}p' + \frac{1}{6}\cdot 0 + \frac{1}{6}\cdot 1$$

$\Leftarrow$ הסיכוי לנצח הוא $\frac{1}{7}$.

תוחלת הרווח בכל משחק = $1 = 7 \cdot \frac{1}{7} = 0$. נניח שהמשחק עולה 99 אגורות. נסמן ב – P_m את הרווח במשחק m#.

$$E(P_m) = 0.01$$

בממוצע הרווח הוא של אגורה אחת.

משחקים 1000 משחקים. מה הסיכוי ש – $0 \le \sum P_m$?

משפט הגבול המרכזי אומר שבקירוב

$$\frac{\frac{1}{N}\sum P_m - 0.01}{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1000}}} \sim N(0,1)$$

$$\{\sum P_m \ge 0\}$$

$$Z \ge -\frac{0.01}{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1000}}} \approx -\frac{\frac{1}{100}}{\frac{1}{13}} = -0.13 \Rightarrow P(\ ) \approx 0.5517$$