פתרון תרגיל 10 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ז

1. נתבונן במשטח סיבוב הנתון על ידי הפרמטריזציה:

$$X(\theta,\phi) = (r(\phi)\cos\theta, r(\phi)\sin\theta, \phi)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_\theta = (-r(\phi)\sin\theta, r(\phi)\cos\theta, 0), X_\phi = (r'(\phi)\cos\theta, r'(\phi)\sin\theta, 1)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{\theta\theta} = (-r(\phi)\cos\theta, -r(\phi)\sin\theta, 0), X_{\theta\phi} = (-r'(\phi)\sin\theta, r'(\phi)\cos\theta, 0)$$

$$X_{\phi\phi} = (r''(\phi)\cos\theta, r''(\phi)\sin\theta, 0)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_\theta \times X_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -r(\phi)\sin\theta & r(\phi)\cos\theta & 0 \\ r'(\phi)\cos\theta & r'(\phi)\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = (r(\phi)\cos\theta, r(\phi)\sin\theta, -r'(\phi)r(\phi))$$

ננרמל:

$$\|X_\theta \times X_\phi\| = \sqrt{r^2(\phi)\cos^2\theta + r^2(\phi)\sin^2\theta + (-r'(\phi)r(\phi))^2} = r(\phi)\sqrt{1+(r'(\phi))^2}$$

ובסך הכל:

$$\vec{n} = \frac{X_\theta \times X_\phi}{\|X_\theta \times X_\phi\|} = \frac{1}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}}(\cos\theta, \sin\theta, -r'(\phi))$$

לכן:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & 1+(r'(\phi))^2 \end{pmatrix}$$

כמו כן:

$$L_{11} = X_{\theta\theta}\cdot\vec{n} = -\frac{r(\phi)}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}}$$

$$L_{12} = L_{21} = X_{\theta\phi}\cdot\vec{n} = 0$$

$$L_{22} = X_{\phi\phi} \cdot \vec{n} = \frac{r''(\phi)}{\sqrt{1 + (r'(\phi))^2}}$$

כלומר:

$$(L_{ij}) = \begin{pmatrix} -\frac{r(\phi)}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}} & 0 \\ 0 & \frac{r''(\phi)}{\sqrt{1+(r'(\phi))^2}} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\left(L^i_j\right) = -\left(g^{ij}\right)(L_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r'(\phi))^2}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r(\phi)} & 0 \\ 0 & \frac{r''(\phi)}{1+(r'(\phi))^2} \end{pmatrix}$$

כעת, אם המשטח מינימלי, $H = \frac{1}{2} tr\left(L^i_j\right) = 0$, כלומר:

$$\frac{r''(\phi)}{1 + (r'(\phi))^2} = \frac{1}{r(\phi)}$$

אם $r'(\phi) = 0$ נקבל ש: $r(\phi) \longrightarrow \infty$ ולכן זהו גליל עם רדיוס אינסופי, כלומר מישור (מישור xz).
אחרת, נכפיל את שני האגפים ב– $2r'(\phi)$ ונקבל:

$$\frac{2r'(\phi) r''(\phi)}{1 + (r'(\phi))^2} = \frac{2r'(\phi)}{r(\phi)}$$

כלומר:

$$\left(\ln\left(1 + (r'(\phi))^2\right)\right)' = 2\left(\ln(r(\phi))\right)'$$

נגזרות לוגריתמיות. נבצע אינטגרציה על שני האגפים ונקבל:

$$1 + (r'(\phi))^2 = C^2 r^2(\phi)$$

C^2 הוא קבוע האינטגרציה. אם כן:

$$\frac{dr}{d\phi} = r'(\phi) = \sqrt{C^2 r^2(\phi) - 1}$$

ולכן:

$$\frac{dr}{\sqrt{C^2 r^2(\phi) - 1}} = d\phi$$

נבצע החלפת משתנים: $p = Cr$ ונקבל:

$$\frac{dp}{C\sqrt{p^2 - 1}} = d\phi$$

שוב, נבצע אינטגרציה על שני האגפים:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{p^2 - 1}} = \int C d\phi$$

כלומר:

$$arccoshp = C\phi + B$$

ולכן:

$$p = \cosh\left(C\phi + B\right)$$

ובסך הכל:

$$r\left(\phi\right) = \frac{1}{C}\cosh\left(C\phi + B\right)$$

וזהו אכן קטנואיד.

2. פרמטריזציה של המשטח היא:

$$X\left(u,v\right) = \left(u, v, f\left(u\right) + g\left(v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u = \left(1, 0, f'\left(u\right)\right), X_v = \left(0, 1, g'\left(v\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu} = \left(0, 0, f''\left(u\right)\right), X_{uv} = \left(0,0,0\right), X_{vv} = \left(0, 0, g''\left(v\right)\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & f'\left(u\right) \\ 0 & 1 & g'\left(v\right) \end{vmatrix} = \left(-f'\left(u\right), -g'\left(v\right), 1\right)$$

ננרמל:

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1 + \left(f'\left(u\right)\right)^2 + \left(g'\left(v\right)\right)^2}$$

ולכן:

$$\vec{n} = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'\left(u\right)\right)^2 + \left(g'\left(v\right)\right)^2}}\left(-f'\left(u\right), -g'\left(v\right), 1\right)$$

אם כן:

$$\left(g_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \left(f'\left(u\right)\right)^2 & f'\left(u\right)g'\left(v\right) \\ f'\left(u\right)g'\left(v\right) & 1 + \left(g'\left(v\right)\right)^2 \end{pmatrix}$$

וגם:

$$\left(L_{ij}\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(f'\left(u\right)\right)^2 + \left(g'\left(v\right)\right)^2}}\begin{pmatrix} f''\left(u\right) & 0 \\ 0 & g''\left(v\right) \end{pmatrix}$$

נקבל:

$$\left(L^i_j\right) = -\begin{pmatrix} \frac{f''(u)\left(1+\left(g'(v)\right)^2\right)}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{-f'(u)g'(v)g''(v)}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{-g'(v)f'(u)f''(u)}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{\frac{3}{2}}} & \frac{g''(v)\left(1+\left(f'(u)\right)^2\right)}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{pmatrix}$$

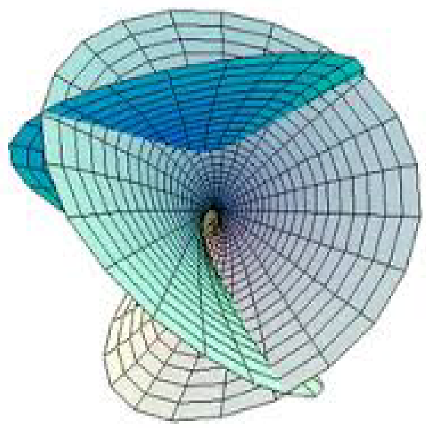
לפיכך:

$$K=\frac{f''(u)\,g''(v)}{\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)}$$

$$H=-\frac{g''(v)\left(1+(f'(u))^2\right)+f''(u)\left(1+(g'(v))^2\right)}{2\left(1+(f'(u))^2+(g'(v))^2\right)}$$

3. נראה שאכן $H=0$.

(א) המשטח נראה כך:



וקטורי הנגזרות הם:

$$X_u=\left(1-u^2+v^2,2vu,2u\right),X_v=\left(2uv,1-v^2+u^2,-2v\right)$$

נחשב את הנורמל:

$$X_u\times X_v=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1-u^2+v^2 & 2vu & 2u\\ 2uv & 1-v^2+u^2 & -2v\end{vmatrix}=\left(1+u^2+v^2\right)\cdot\left(-2u,2v,\left(1-u^2-v^2\right)\right)$$

ננרמל:

$$\|X_u\times X_v\|=\left(1+u^2+v^2\right)\cdot\sqrt{4u^2+4v^2+\left(1-u^2-v^2\right)^2}=\left(1+u^2+v^2\right)^2$$

ולכן:

$$\vec{n}=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\frac{1}{\left(1+u^2+v^2\right)}\left(-2u,2v,\left(1-u^2-v^2\right)\right)$$

וקטורי הנגזרות השניות הם:

$$X_{uu}=(-2u,2v,-2),X_{uv}=(2v,2u,0),X_{vv}=(2u,-2v,-2)$$

מקדמי המטריקה הם:

$$g_{11} = X_u \cdot X_u = \left(1 + u^2 + v^2\right)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = X_u \cdot X_v = 0$$

$$g_{22} = X_v \cdot X_v = \left(1 + u^2 + v^2\right)^2$$

איברי התבנית היסודית השנייה הם:

$$L_{11} = X_{uu} \cdot \vec{n} = 2$$

$$L_{12} = X_{21} = X_{uv} \cdot \vec{n} = 0$$

$$L_{22} = X_{vv} \cdot \vec{n} = -2$$

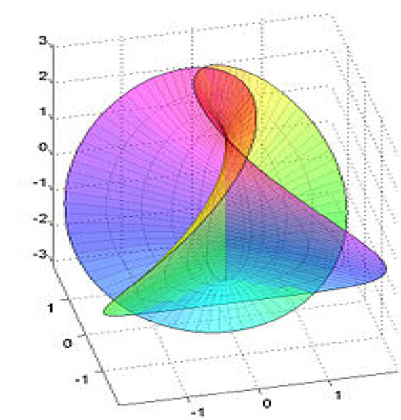
נזכור ש: $\left(L^i_j\right) = -\left(g^{ij}\right)\left(L_{ij}\right)$, ולכן:

$$\left(L^i_j\right) = -\begin{pmatrix} \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2} \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$H = \frac{1}{2} tr\left(L^i_j\right) = 0$$

(ב) המשטח נראה כך:



בדקו שהפרמטריזציה איזותרמית.
נחשב את הלפלסיאן.

$$X_1(u,v) = 2\cos v \sinh u - \frac{2}{3}\cos 3v \sinh 3u$$

מתקיים:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial u^2} = 2\cos v \sinh u - 6\cos 3v \sinh 3u, \quad \frac{\partial^2 X_1}{\partial v^2} = -2\cos v \sinh u + 6\cos 3v \sinh 3u$$

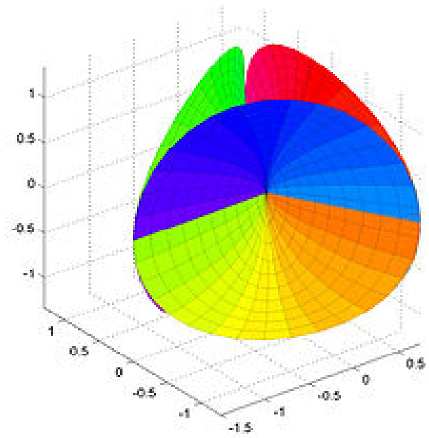
ואכן $\Delta\left(X_1\right)=0$.
באופן דומה, עבור:

$$X_2\left(u,v\right)=2\sin v\sinh u-\frac{2}{3}\sin 3v\sinh 3u$$

$$X_3\left(u,v\right)=2\cos 2v\cosh 2u$$

וקל לראות שאכן: $\Delta\left(X_2\right)=\Delta\left(X_3\right)=0$.
לכן $\Delta\left(X\right)=0$.
מכיוון שהקואורדינטות איזותרמיות, זה מספיק לכך שאכן $H=0$.

(ג) המשטח נראה כך:



לכו על זה.