(88132) חשבון אינפינטסימלי 1 | מבחן תשע"ט מועד א'

הצעת פתרון | לירן מנצורי ויונתן סמידוברסקי

שאלה 1

הוכח את **משפט לייבניץ על טורים עם סימן מתחלף:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סידרה יורדת המתכנסת לאפס. אזי:

א. הטור $\sum(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

ב. שאריות הטור מקיימות $|r_k| \le a_{k+1}$.

(רמז: סכימה בזוגות.)

<u>הוכחה</u>

(1) לכל k, מתקיים

$$S_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k})$$

$$S_{2(k+1)} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + ... + (a_{2k-1} - a_{2k}) + (a_{2k+1} - a_{2k+2})$$

נשים לב שמירידתה של הסדרה, מתקיים שכל הסכומים בסוגריים הם חיוביים, בפרט $a_{2k+1} - a_{2k+2}$ ולכן $S_{2(k+1)} \ge S_{2k}$
כלומר $(S_{2k})_{k=1}^{\infty}$ סדרה עולה
ומצד שני, אפשר להסתכל על S_{2k} גם כך

$$S_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - ... - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k}$$

כעת הסכומים שאנחנו מחסירים חיוביים, וגם $a_{2k} > 0$, סך הכל הסדרה חסומה מלעיל, ולכן מתכנסת $S := lim_{k\to\infty}S_{2k}$.
כעת, $S_{2k-1} = S_{2k} - a_{2k} \to S - 0 = S$
לסיכום $S_{2k}, S_{2k-1} \to S$ ולכן $S_k \to S$, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = S$ קיים.
(2) יהי k נסתכל בטור על הזנב $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty}(-1)^n a_n$,
עבור k אי- זוגי נקבל מקרה פרטי של מה שהוכחנו כי $a_{k+1} \ge a_{k+1} - a_{k+2} + a_{k+3} = r_k \ge 0$
עבור k זוגי $r_k = -a_{k+1} + a_{k+2} - ... = -(a_{k+1} - a_{k+2} + ...)$
כעת $0 \le a_{k+1} - a_{k+2} + ... \le a_{k+1}$, לכן $-a_{k+1} \le r_k \le 0$
סך הכל $|r_k| \le a_{k+1}$ לכל k, כלומר $S_k - a_{k+1} \le S \le S_k + a_{k+1}$ ולכן סיימנו.

שאלה 2

נאמר שסידרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ היא **חד־חד ערכית** אם לכל שני מספרים טבעיים $i \neq j$ מתקיים $x_i \neq x_j$.

תהי f פונקציה ממשית, ותהי a נקודת הצטברות של תחום ההגדרה של הפונקציה f.

הוכח: $\lim_{x\to a} f(x) = b \iff$ לכל סידרה **חד־חד ערכית** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ בתחום ההגדרה של הפונקציה כך ש $x_n \longrightarrow a$, מתקיים $f(x_n) \longrightarrow b$.

תשובה:

$\Leftarrow$ נניח $\lim_{x\to a} f(x)=b$. צ"ל: לכל סדרה חח"ע $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ בתחום
ההגדרה של הפונקציה כך ש: $x_n\to a$ מתקיים $f(x_n)\to b$.
$\lim_{x\to a} f(x)=b$ ומהגדרת גבול פונקציה, לכל סדרה $x_n\to a$ בתחום
הפונקציה מתקיים ש: $f(x_n)\to b$, ובפרט, לכל סדרה חח"ע. מש"ל.

$\Rightarrow$ נניח שלכל סדרה חח"ע $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ בתחום ההגדרה של הפונקציה
כך ש: $x_n\to a$ מתקיים $f(x_n)\to b$ ונוכיח ש: $\lim_{x\to a} f(x)=b$.
תהי סדרה $a\neq x_n\to a$. צ"ל: $f(x_n)\to b$.
ראשית, אם הסדרה חח"ע, סיימנו לפי הנתון.
אחרת, יש $i\neq j$ כך ש: $x_i=x_j$.
נראה שיש אינסוף איברים ששונים זה מזה. נב"ש שיש מספר סופי
של איברים ששונים זה מזה. הסדרה שואפת ל-a ולכן לבסוף
כל איברי הסדרה שווים ל-a בסתירה לכך ש $a\neq x_n\to a$.
אם יש אינסוף איברים ששונים זה מזה.
נסמן x_{k_n} להיות ת"ס של x_n כך שכל איברי x_{k_n} שונים זה מזה
(יש אינסוף כאלה ולכן זה אפשרי), אזי x_{k_n} חח"ע.
אזי x_{k_n} ת"ס של x_n ולכן $x_{k_n}\to a$ ומהנתון $f(x_{k_n})\to b$.
נב"ש של $f(x_n)$ יש גבול חלקי נוסף, כלומר יש ת"ס x_{m_n} של
x_n כך ש: $f(x_{m_n})\to l$. ברור ש: $x_{m_n}\to a$ כי ת"ס של x_n.
אם x_{m_n} חח"ע, אזי מהנתון: $f(x_{m_n})\to b$ ולכן $l=b$ כנדרש.
אם x_{m_n} לא חח"ע יש לה ת"ס חח"ע (ראינו מקודם), כלומר $x_{m_{n_k}}\to a$
חח"ע ולכן: $\lim(x_{m_{n_k}})=b$ ובנוסף $l=\lim(x_{m_n})=\lim(x_{m_{n_k}})=b$
ומיחידות הגבול $l=b$. כנדרש.
בכל מקרה $l=b$ ולכן ל- $f(x_n)$ יש גבול חלקי יחיד $=b$ ולכן
$f(x_n)\to b$. כנדרש.

שאלה 3

נתונה העובדה הבאה (אינך מתבקש להוכיחה):

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\log n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \gamma := 0.57721\ldots$$

א. יהי $0 < a$ מספר ממשי. הוכח שהטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} a^{\log n}$ מתכנסים ומתבדרים ביחד.

ב. לכל מספר ממשי $0 < a$, קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ מתכנס או מתבדר.

(א)

נראה ש $\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}$ מתכנס $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} a^{log(n)}$ מתכנס

שני הטורים חיוביים, אפשר להפעיל השוואה גבולית ומקבלים

$$\frac{a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}}{a^{log(n)}} = a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-log(n)} \to a^{0.57721\ldots}$$

ולכן סיימנו, מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

(ב)

$\sum_{n=1}^{\infty} a^{log(n)}$

אם $a \geq 1$, $a^{log(n)} \not\to 0$ ובפרט הטור מתבדר.

אם $0 < a < 1$, אז $a^{log(n)} \searrow 0$ מפעילים עיבוי ומקבלים שמתכנס או מתבדר יחד עם $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a^{log(2^n)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n a^{nlog(2)} = \sum_{n=1}^{\infty}(2a^{log(2)})^n$

זהו טור הנדסי ומתכנס אם ורק אם $0 < 2a^{log(2)} < 1$ (בגלל ש$a > 0$ אין צורך לבדוק בין -1 ל0)

כלומר $a^{log(2)} < \frac{1}{2}$

$$a < \sqrt[log(2)]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e}$$

לכן מתכנס רק בעבור $0 < a < \frac{1}{e}$ ומתבדר עבור $a \geq \frac{1}{e}$

שאלה 4

מצא את הנקודות בהן הפונקציה

$$f(x) := [x] + [-x]$$

אינה רציפה. עבור כל נקודת אי־רציפות, מצא את סוג אי הרציפות שלה.

(עבור מספר ממשי a, $[a] := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq a\}$ הוא הערך השלם של a.)

<u>בעבור $\mathbb{Z} \ni \boldsymbol{x_0}$ מתקיים כי $lim_{x\to x_0} f(x) = -1$ אבל $f(x_0) = 0$-אי רציפות סליקה</u>

[משום שניקח $x_0 \neq x_n \to x_0$,

אם יש כמות סופית של $x_n > x_0$: אז מסתכלים על הזנב המקיים $x_n < x_0$ ואז $lim_{n\to\infty}[x_n] + [-x_n] = (x_0 - 1) + (-x_0) = -1$

אם יש כמות סופית של $x_n < x_0$: אז מסתכלים על הנס המקיים $x_n > x_0$ ואז $lim_{n\to\infty}[x_n] + [-x_n] = (x_0) + (-x_0 - 1) = -1$

אם יש כמות אינסופית משניהם, מפצלים לשתי תתי סדרות המכסות את הסדרה ומתכנסות לאותו גבול וסיימנו.

נשים לב שמתקיים $f(x_0) = (x_0) + (-x_0) = 0$ ולכן אי רציפות, מסוג **אי רציפות סליקה**]

<u>בעבור $\mathbb{Z} \not\ni \boldsymbol{x_0}$ מתקיים כי $lim_{x\to x_0} f(x) = -1$ אבל $f(x_0) = 0$- רציפה</u>

[ניקח $x_0 \neq x_n \to x_0$

בצורה דומה מקבלים כי $lim_{n\to\infty} f(x_n) = -1$

אבל $f(x_0) = [x_0] + [-x_0] = -1$

הוא מעגל את x_0 כלפי מטה לאיזשהו $z \in \mathbb{Z}$, ואת $-x_0$ כלפי מטה גם, כלומר ל $-z-1 \in \mathbb{Z}$.

ולכן **רציפה** בכל הלא שלמים]

שאלה 5

תהי

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ ax+b & x > 2 \end{cases}.$$

א. מצא את ערכי הפרמטרים a, b שעבורם הפונקציה f גזירה בכל הישר הממשי.

ב. האם יש פרמטרים a, b כך שהנגזרת השניה f'' קיימת בכל הישר הממשי?

(א)

נשים לב שבעבור $x > 2$, הנגזרת היא $f'(x) = a$
בעבור $x < 2$, הנגזרת היא $f'(x) = 2x$
למדנו בהרצאה שרציפה גורר גזירה ולכן

$$4 = lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = lim_{x\to 2^+} f(x) = 2a + b$$

כעת קיבלנו $2a + b = 4$,
הנקודה היחידה שלא ברור אם גזירה בה היא $x = 2$, צריך בעצם שהגבול $lim_{h\to 0} \frac{f(h+2)-f(2)}{h}$ יהיה קיים
מההרצאה זה שקול לכך שהגבול מימין ומשמאל שווים

$$lim_{h\to 0^+} \frac{f(h+2)-f(2)}{h} = lim_{h\to 0^-} \frac{f(h+2)-f(2)}{h}$$

מצד שמאל,

$$lim_{h\to 0^-} \frac{f(h+2)-f(2)}{h} = lim_{h\to 0^-} \frac{(h+2)^2-4}{h} = lim_{h\to 0^-} \frac{h^2+4h}{h} = lim_{h\to 0^-} h + 4 = 4$$

מצד ימין,

$$lim_{h\to 0^+} \frac{f(h+2)-f(2)}{h} = lim_{h\to 0^+} \frac{a(h+2)+b-2^2}{h} = lim_{h\to 0^-} (a + \frac{2a+b-4}{h}) = lim_{h\to 0^-} (a) = a$$

כלומר צריך

$$\begin{cases} 2a+b=4 \\ a=4 \end{cases}$$

כלומר $a=4, b=-4$

(ב)

עבור כל a,b אחרים, ראינו שהפונקציה לא גזירה. נבדוק אם היא גזירה פעמיים עם הערכים שמצאנו.
הפונקציה שלנו כעת נראית כך

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 2 \\ 4x-4 & x>2 \end{cases}$$

כעת גוזרים ומקבלים

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & x\leq 2 \\ 4 & x>2 \end{cases}$$

היא גזירה ב$x\neq 2$, נבדוק מה קורה ב$x=2$. מצד אחד,

$$lim_{h\to 0^+}\frac{f'(2+h)-f'(2)}{h}=lim_{h\to 0^+}\frac{4-4}{h}=0$$

$$lim_{h\to 0^-}\frac{f'(2+h)-f'(2)}{h}=lim_{h\to 0^-}\frac{2(2+h)-4}{h}=2$$

הגבולות שונים ולכן לא גזירה פעמיים.