תרגול 6

משוואת הגלים החד מימדית על מיתר אינסופי

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

נוסחת דלאמבר:

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

נשים לב כי:

$$u_{pq} = 0$$

נבצע אינטגרל לפי p ולפי q:

$$u(p,q) = F(p) + G(q)$$

הערה:

נזכור כי:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{a}$$

וכן:

$$a = -c^2 \,, b = 0 \,, c = 1$$

לכן:

$$\Delta = b^2 - ac = 0 - (-c^2) \cdot 1 = c^2 > 0$$

ולכן משוואת הגלים היא מד"ח מסוג היפרבולי.

כעת –

$$\frac{dt}{dx} = \frac{0 \pm \sqrt{c^2}}{-c^2} \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \,, \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{c}$$

לכן:

$$\int c\, dt = \int -dx$$

$$ct = -x + c_1$$

$$p = \boxed{c_1 = x + ct}$$

$$\int c\, dt = \int dx$$

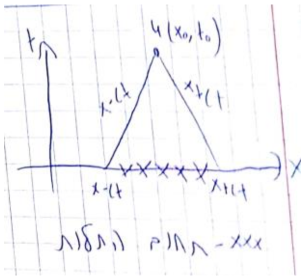
$$ct = x + c_2$$

תרגול 6

$$q = \boxed{c_2 = x - ct}$$

לכן:

$$u(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$



בהינתן 2 תנאי התחלה, ניתן למצוא את F ו $-G$.

$$\boxed{\begin{cases} u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x) \\ u_t(x,0) = cF'(x) - cG'(x) = g(x) \end{cases}}$$

<u>משפט:</u> אם $f(x) \in C^2[a,b]$, $g(x) \in C^1[a,b]$ אז $u \in C^2[a,b]$ פתרון כזיר ברציפות לפי x ו $-t$.

$$u(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

<u>תרגיל:</u>

פתור את משוואת הגלים:

$$u_{tt} - 9u_x = 0$$

עם תנאי ההתחלה:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

<u>פתרון:</u>

נשים לב ש - $c = 3$. נתון גם תנאי התחלה:

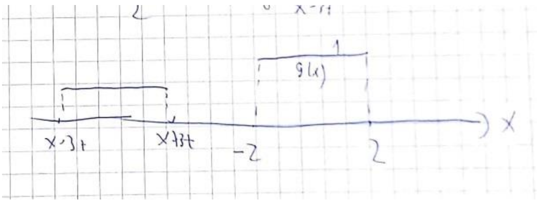
$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \begin{cases} 1, & |x| \le 2 \\ 0, & |x| > 2 \end{cases}$$

נוסחת דלאמבר במקרה שלנו:

$$u(x,t)=\frac{f(x-3t)+f(x+3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)ds$$

<u>מקרה א':</u>

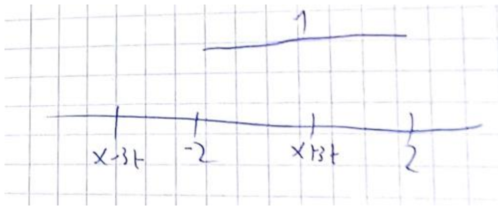


$$x-3t<x+3t<-2<2$$

לכן:

$$u(x,t)=\frac{0+0}{2}-\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)ds=0$$

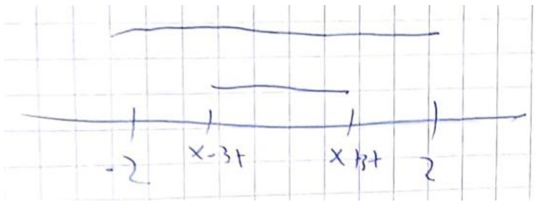
<u>מקרה ב':</u>



$$x-3t<-2\leq x+3t<2$$

$$u(x,t)=\frac{f(x-3t)+f(x+3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)ds=\frac{0+1}{2}+\frac{1}{6}\int_{-2}^{x+3t}1\,ds$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}[s]_{-2}^{x+3t}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(x+3t+2)$$

<u>מקרה ג':</u>

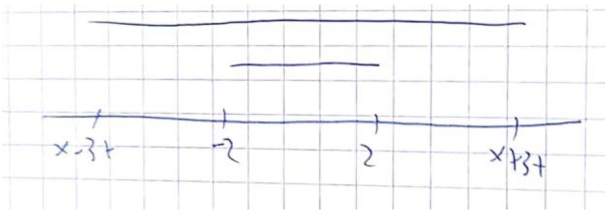


$$u(x,t)=\frac{f(x-3t)+f(x+3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)ds=\frac{1+1}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}1\,ds$$
$$=1+\frac{1}{6}[s]_{x-3t}^{x+3t}=1+\frac{1}{6}[x+3t-x+3t]=1+t$$

<u>מקרה ד':</u>

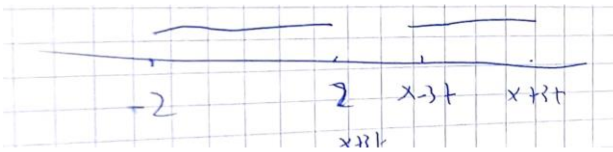
$$u(x,t)=\frac{f(x-3t)+f(x+3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)ds=\frac{1+0}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{2}1\,ds$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}[s]_{x-3t}^{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(2-x+3t)$$

<u>מקרה ה':</u>



$$u(x,t)=\frac{f(x-3t)+f(x+3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)ds=\frac{0+0}{2}+\frac{1}{6}\int_{-2}^{2}1\,ds=\frac{1}{6}\cdot 4$$
$$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

<u>מקרה ו':</u>



$$u(x,t)=\frac{f(x-3t)+f(x+3t)}{2}+\frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t}g(s)ds=0$$

<u>לסיכום:</u>

$$u(x,t)=\begin{cases} 0, & \text{מקרה א} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}(x+3t+2), & \text{מקרה ב} \\ 1+t, & \text{מקרה ג} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{6}(-x+2+3t), & \text{מקרה ד} \\ \frac{2}{3}, & \text{מקרה ה} \\ 0, & \text{מקרה ו} \end{cases}$$

<u>מסקנה:</u> תנאי ההתחלה אינם רציפים ולכן גם הפונקציה $u(x,t)$ שלנו לא רציפה.

הערה:

עבור $x_0 \in \mathbb{R}$ נחשב את:

$$\lim_{t\to\infty} u(x_0,t)$$

נחלק למקרים:

$$x_0 - 3t \xrightarrow{t\to\infty} -\infty$$

$$x_0 + 3t \xrightarrow{t\to\infty} \infty$$

עבור מקרה ה':

$$\lim_{t\to\infty} u(x_0,t) = \frac{2}{3}$$

תרגיל:

פתור את משוואת הגלים –

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,1) = f(x) \\ u_t(x,1) = g(x) \end{cases}$$

פתרון:

נגדיר –

$$w(x,t) = u(x,t+1)$$

נבדוק תנאי התחלה:

$$\boxed{w(x,0) = u(x,1) = f(x)}$$

אם נגזור:

$$w_t(x,t) = u_t(x,t+1)$$

לכן:

$$\boxed{w_t(x,0) = u_t(x,1) = g(x)}$$

קיבלנו משוואת גלים עבור w:

$$\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = u(x,1) = f(x) \\ w_t(x,0) = u_t(x,1) = g(x) \end{cases}$$

כעת ניעזר בנוסחת דלאמבר:

$$w(x,t) = \frac{f(x-ct) + f(x+ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$$w(x,t)=u\left(x,\underbrace{t+1}_{\tilde{t}}\right)$$

לכן נעשה החלפת משתנים ל – t:

$$\tilde{t}=t+1$$

לכן:

$$u(x,\tilde{t})=w(x,\tilde{t}-1)$$

$$\Rightarrow u(x,t)=w(x,t-1)$$

ולכן:

$$u(x,t)=\frac{f\big(x-c(t-1)\big)+f\big(x+c(t-1)\big)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-c(t-1)}^{x+c(t-1)}g(s)ds$$

■

תרגול 6

פתרון למשוואת הגלים הלא הומוגנית על מיתר אינסופי

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=G(x,t), \qquad -\infty<x<\infty, t>0 \\ u(x,0)=f(x) \\ u_t(x,0)=g(x) \end{cases}$$

ניעזר בנוסחת דלאמבר למקרה הלא הומוגני:

$$u(x,t)=\underbrace{\frac{f(x-ct)+f(x+ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)ds}_{\text{פתרון לחלק ההומוגני}}$$
$$+\frac{1}{2c}\int_0^t\left[\int_{x-c(t-\eta)}^{x+c(t-\eta)}G(s,\eta)ds\right]d\eta$$

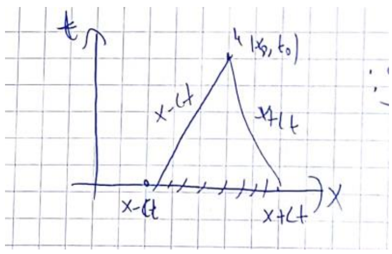
הערה 1:

עשינו החלפת משתנים בתוך האינטגרל:

$$G(x,t)\to G(s,\eta)$$

הערה 2:

בנוסחה הנ"ל יש אינטגרל כפול ולא כפל של אינטגרלים.



תרגיל:

פתרו את משוואת הגלים:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2e^{-x}\sin t=0 \\ u(x,0)=\sin x=f(x) \\ u_t(x,0)=1=g(x) \end{cases}$$

פתרון:

נשים לב:

$$G(x,t)=-2e^{-x}\sin t$$

$$\Rightarrow G(s,\eta)=-2e^{-s}\sin\eta$$

לכן:

$$u(x,t)=\frac{f(x-t)+f(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{x-c(t-\eta)}^{x+c(t-\eta)}G(s,\eta)ds\right]d\eta$$
$$=\frac{\sin(x-t)+\sin(x+t)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}1\,ds$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\left[\int_{x-c(t-\eta)}^{x+c(t-\eta)}-2e^{-s}\sin(\eta)\,ds\right]d\eta$$

נזכור כי:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

לכן:

$$u(x,t)=\frac{2\sin(x)\cos(t)}{2}+\frac{1}{2}[x+t-(x-t)]+\int_0^t\left[\sin(\eta)\int_{x-c(t-\eta)}^{x+c(t-\eta)}-e^{-s}ds\right]d\eta$$
$$=\sin x\cos t+t+\underbrace{\int_0^t\sin\eta\,[e^{-s}]_{x-c(t-\eta)}^{x+c(t-\eta)}d\eta}_{I}$$

נחשב את I:

$$I=\int_0^t\sin\eta\left[e^{-(x+c(t-\eta))}-e^{-(x-c(t-\eta))}\right]d\eta=e^{-x}\int_0^t\sin\eta\,(-2\sinh(t-\eta))d\eta$$
$$=-2e^{-x}\underbrace{\int_0^t\sin\eta\sinh(t-\eta)\,d\eta}_{J}$$

נחשב את J:

$$J=\int_0^t\underbrace{\sin\eta}_{u}\,\underbrace{\sinh(t-\eta)\,d\eta}_{v'}$$

$$\underbrace{=}_{\text{אינטגרציה בחלקים}}[-\sin\eta\cosh(t-\eta)]_{\eta=0}^{\eta=t}+\int_0^t\underbrace{\cos\eta}_{u}\,\underbrace{\cosh(t-\eta)\,d\eta}_{v'}$$

$$\underbrace{=}_{\text{אינטגרציה בחלקים}}-\sin t-[\cos\eta\sinh(t-\eta)]_0^t-\underbrace{\int_0^t\sin\eta\sinh(t-\eta)\,d\eta}_{J}$$

לכן:

$$J=-sint\ t-(0-\sinh(t))-J$$

$$\boxed{J=\frac{-\sin t+\sinh t}{2}}$$

לכן:

$$\boxed{I} = -2e^{-x}J = -2e^{-x}\frac{-\sin t + \sinh t}{2} = \boxed{-e^{-x}(\sinh t - \sin t)}$$

לכן:

$$\boxed{u(x,t) = \sin x \cos t + t + e^{-x}(\sinh t - \sin t)}$$

נבדוק תנאי התחלה:

$$u(x,0) = \sin x \ , u_t(x,0) = 1$$

■

<u>משוואת הגלים בקטע סופי בשיטת הפרדת משתנים של פורייה:</u>

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < L, t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

כולל תנאי שפה:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t \geq 0$$