דף תרגילים 3

עקומות ב $\mathbb{R}^2$:

1. נתונה הפונקציה $y = x^3$:
   א. מצא פרמטרזציה רגולרית של הגרף של הפונקציה. ושרטט את העקומה במערכת הצירים.
   ב. האם $\delta(u) = (u^2, u^6)$ פרמטרזציה רגולרית של הגרף?
   ג. מצא נוסחאות לוקטור המשיק T והווקטור הנורמל N בכל נקודה על העקומה.
   ד. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת הפרמטריזציה.
   ה. מצא את עקמומיות העקומה בעזרת נוסחת Bateman. תזכורת לנוסחאת Bateman:
   $$|k(x,y)| = \left|\frac{F''_{xx}{F'_y}^2 + F''_{yy}{F'_x}^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y}{\sqrt{\left({F'_x}^2 + {F'_y}^2\right)^3}}\right|$$
   ו. מהי העקמומיות המינימאלית של העקומה, ועל איזה נקודה היא מתקבלת?

2. תהי פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2+x^2)^3}$. מצא פרמ' במהירות יחידה לעקומה זאת.

3. הוכיחו שלעקומה $\gamma(t)$ (במישור או במרחב) יש מהירות קבועה אם ורק אם $\gamma''(t)$ מאונך ל- $\gamma'(t)$.

4. חשב את עקמומיות העקומה γ המוגדרת ע"י המשוואה (היעזר בנוסחת Bateman)
   א. $ax^2 + by^2 = 1$
   ב. $x^2 + y^2 + 4y + 1 = 2x$

5. חשב את העקמומיות של העקומות הבאות:
   א. $\gamma(t) = (t, \cosh t)$
   ב. $\gamma(t) = (\cos^3 t, sin^3 t)$

6. חשב את העקמומיות הכוללת של העקומות:
   א. $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $-2n\pi \le \phi \le 2n\pi$
   ב. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה $5x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$.
   ג. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה $(x^2+6x+y^2-4y+12)(x^2-6x+y^2+4y+12) = 0$.
   ד. γ פרמ' במהירות יחידה של פתרון המשוואה $(x^2+y^2-1)(2x^2+2y^2-1)\cdot\ldots\cdot(nx^2+ny^2-1) = 0$.
   n מספר שלם חיובי.

7. חקור את העקומה $\varphi(t) = \left(\cos t, \frac{1}{2}\sin 2t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$.
   א. צייר אותה.
   ב. חשב T, N ועקמומיות.
   ג. מה עם מהירות יחידה?
   ד. מצא את $\int_0^{2\pi} k(t)dt$, האם יש סיבה תיאורתית לתוצאה הזאת?

עקומות ב $\mathbb{R}^3$:

8. נתונה עקומה $\gamma: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י הפרמטריזציה $\gamma(\cos t, t, \sin t - 3)$

א. חשב את מהירות העקומה.
ב. חשב את אורך העקומה.
ג. נתונה פונקציה $t:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to[0,2\pi]$, $t(s)=4s$. איך שינוי הפרמטריזציה $\tilde{\gamma}(s)=\gamma\big(t(s)\big)$ ישפיע על אורך העקומה?
ד. מצא פרמטרזציה במהירות יחידה לעקומה $\gamma(t)$.

9. הראה שהעקומות הבאות נתונות בפרמטרזצית יחידה וחשב את העקמומיות והפיתול שלהן
א. $\gamma(t)=\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1+t)^3},\frac{1}{3}\sqrt{(1-t)^3},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$
ב. $\gamma(t)=\left(\frac{4}{5}\cos t,1-\sin t,-\frac{3}{5}\cos t\right)$

10. חקור את העקומות הבאות – בדוק אם יש להן פר"מ מהירות יחידה שניתן למצוא בזמן סביר, מצא T,N,B, עקמומיות ופיתול, ונסה לצייר אותן.
א. $\gamma(t)=(at\cos t,at\sin t,\ln t)$
ב. $\gamma(t)=\big((3+\cos t)\cos 3t,(3+\cos t)\sin 3t,\sin t\big)$.
ג. העקומה המוגדרת ע"י המשוואות: $x^2+y^2+z^2=1$ ו-$y=x^2$.

11. הוכח שכל מסילה $\gamma(s)$ במהירות יחידה עם עקמומיות $k>0$ ופיתול τ קבועים היא מהצורה $\gamma(s)=P+\cos\frac{s}{a}A+\sin\frac{s}{a}B+sC$ עבור איזשהם וקטורים אורתוגונליים A,B,C עם $\|A\|=\|B\|$ ואיזשהו $P\in\mathbb{R}^3$. רמזים:
א. השתמש במשוואות פרנה בשביל להוכיח ש- $\tau T_\gamma+kB_\gamma$ וקטור קבוע, הוא יהיה C.
ב. אז הגדירו עקומה חדשה $\delta(s)=\gamma(s)-sC$, זכרו שבניגוד ל- $\gamma(s)$, $\delta(s)$ לא חייבת להיות במהירות יחידה. הראו ש- $\delta''(s)$ מאונך ל- $\delta'(s)$, והסיקו של- $\delta(s)$ יש מהירות קבועה (שאלה 3).
ג. הוכיחו שיש ל- עקמומיות קבועה, ושהפיתול שלה הוא 0.
ד. הסיקו מהתרגול שהיא בתוך מישור, ושהיא מעגל הנע במהירות קבועה – מה שיאמר שהיא מהצורה $P+\cos\frac{s}{a}A+\sin\frac{s}{a}B$ כאשר P מרכז המעגל ו- A,B וקטורים אורתוגונליים באותו אורך שפורשים את המישור עליו $\delta(s)$ נמצאת.