תרגיל 4 אינפי 3

1) הוכיחו כי הנורמה האוקלידית הסטנדרטית $\|\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה.

2) תהי $f: D \to \mathbb{R}$ רציפה כאשר $D \subseteq \mathbb{R}^n$. הוכיחו או הפריכו:

א. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ שתי מסילות רציפות כך ש: $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ וגם $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$. אזי, קיים $t \in (0,1)$ כך ש: $f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$.

ב. תהיינה $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ שתי מסילות רציפות כך ש: $\gamma_1(0) = \gamma_2(1) = a$ וגם $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = b$. אזי, קיים $t \in [0,1]$ כך ש: $f(\gamma_1(t)) = f(\gamma_2(t))$.

3) יהי (X, d) מרחב מטרי, הוכיחו או הפריכו:

א. תהי פונקציה $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה במ״ש ושונה מ-0, אזי $\frac{1}{f}$ רציפה במ״ש.

ב. תהי פונקציה $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה במ״ש וישנו $R > 0$ עבורו $|f(x)| \geq R$ לכל $x \in X$, אזי $\frac{1}{f}$ רציפה במ״ש.

ג. יהיו פונקציות $f, g: X \to \mathbb{R}$ רציפות במ״ש, אזי $f \cdot g$ רציפה במ״ש.

ד. יהיו פונקציות $f, g: X \to \mathbb{R}$ רציפות במ״ש כך ש- f חסומה, אזי $f \cdot g$ רציפה במ״ש.

ה. יהיו פונקציות $f, g: X \to \mathbb{R}$ רציפות במ״ש כך ש- f ו- g חסומות, אזי $f \cdot g$ רציפה במ״ש.

4)

א. תהי סדרת פונקציות $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפות במ״ש שמתכנסת ל- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ בנורמה $\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. האם f רציפה במ״ש?

ב. אותו דבר בנורמה $\|f\|_\infty = \sup\{f(x) | x \in \mathbb{R}\}$