

## תרגיל 7

1. מהם רכיבי הקשירות ב- $\mathbb{Q}$  עם הטופולוגיה האוקלידית?
2. הוכיחו שבלתי קשירות לחלוטין היא תכונה תורשתית.
3. (א) הוכיחו כי מרחב טופולוגי  $X$  הוא טריויאלי אם ורק אם יש לו בסיס בעל קבוצה אחת.  
(ב) יהי  $X$  מרחב דיסקרטי, הוכיחו כי קבוצה של קבוצות פתוחות (שזו בעצם סתם קבוצה של קבוצות) היא בסיס אם ורק אם היא מכילה את כל היחידונים (הקבוצות בגודל 1).
4. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי  $B_2$ , הוכיחו כי  $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$ .
5. תהי  $X$  קבוצה לא בת מניה עם טופולוגיה קו-מנייתית (cocountable). כלומרת הקבוצות הפתוחות הן קבוצה ריקה, וקבוצות שהמשלים שלהן הוא בן מניה. האם מרחב זה הוא  $B_2$ ?
6. (א) יהי  $X$  מרחב  $B_2$ . הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף). כלומר, אם יש אוסף  $\mathcal{U}$  של קבוצות פתוחות כך ש- $X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{U}} U_i$ , אז יש תת קבוצה בת מניה  $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{U}$  כך ש- $X = \bigcup_{U_i \in \mathcal{O}} U_i$ .  
(ב) יהי  $X$  מרחב  $B_2$ . הראו שלכל בסיס  $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i \in I}$  יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס.