הרצאה 10

$$\Gamma_f$$
$$l(x) = f(a) + df_a(x-a)$$
$$f(x) = l(x) + o(||x-a||)_{,x\to a}$$

Γ_l – מישור משיק ל-Γ_f בנקודה $(a, f(a))$.

$$l(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) = A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B$$

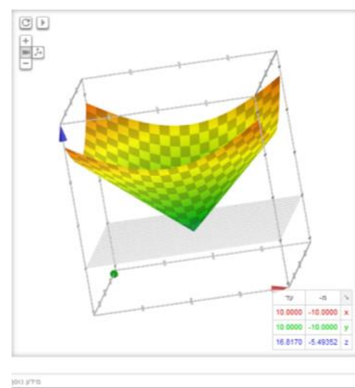
Γ_l – מישור אפיני עבור הנקודה $(a, f(a)$. $l(a) = f(a)$

$$f(x) - l(x) = o(||x-a||)_{,x\to a}$$

דוגמא

$$n = 2$$
$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Gamma_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+y^2}\right\}$$

ניקח מישור $z = 0$ ב-$a = (0,0)$. $f(x) - l(x) = \sqrt{x^2+y^2} = ||x,y||$, ולכן זה לא $o(||x-0||)$, כל מישור משיק אחר יהיה $f(x) - f(a) = \alpha||x,y||$ ולכן זה לא מישור משיק.


b

משוואה של מישור משיק

$$\boxed{x_{n+1} = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}$$

$$T_{(a,f(a))}(\Gamma_f)$$

$$a_{n+1} = f(a) = f(a_1, \dots, a_n)$$

$$\boxed{\begin{gathered} x_{n+1} - a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \\ a_{n+1} = f(a) \end{gathered}}$$

$$n = 2$$
$$a = (x_0, y_0)$$
$$f(a) = z_0$$
$$z = f(x, y), (x, y) \in U$$
$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

המשוואה של $T_{(x_0,y_0,z_0)}$:

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

דוגמא

$$z = \sqrt{1 - x^2 + y^2}$$

$$(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma_f \ , x_0^2 + y_0^2 < 1 \ , z_0 = \sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}$$

$$z - z_0 = \frac{-x_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(x_0 - y_0) + \frac{-y_0}{\sqrt{1 - x_0^2 - y_0^2}}(y - y_0)$$
$$z - z_0 = -\frac{x_0}{z_0}(x - x_0) - \frac{y_0}{z_0}(y - y_0)$$

$$z_0 z - z_0^2 = -x_0 x + x_0^2 - y_0 y + y_0^2$$
$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$$

$$x_0 x + y_0 y + z_0 z = 1$$

דיפרנציאל של פונקציית הרכבה

משפט (כלל השרשרת)

$$\mathrm{U}_1 \subset\circ \mathbb{R}^n, \mathrm{U}_2 \subset\circ \mathbb{R}^m$$

$$U_1 \xrightarrow{u} U_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^l$$

נניח ש:

1) u דיפ' ב $a \in U_1$
2) f דיפ' ב $b = u(a) \in U_2$

אזי הפונ' $g(x) = f\big(u(x)\big)$ היא דיפ' ב a ומתקיים $dg_a = df_b \circ du_a$.

הוכחה

$$L \coloneqq du_a, M \coloneqq df_b$$

$$u(a + h) = u(a) + L(h) + \underbrace{\epsilon_1(h)}_{\epsilon_1(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0} \big||h|\big|$$

$$f(b + k) = f(b) + M(k) + \underbrace{\epsilon_2(k)}_{\epsilon_2(k)\xrightarrow[k\to 0]{}0} \big||k|\big|$$

$$g(a + h) = f\big(u(a + h)\big) = f\Big(u(a) + L(h) + \epsilon_1(h)\big||h|\big|\Big) = f\left(b + \underbrace{L(h) + \epsilon_1(h)\big||h|\big|}_{k}\right)$$

$$f(b)+M\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)+\epsilon_2\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)\left|\left|L(h)+\epsilon_1(h)||h||\right|\right|$$

$$f(b)=f\big(u(a)\big)=g(a)$$

$$g(a+h)=g(a)+M\big(L(h)\big)+\underbrace{\overbrace{M\big(\epsilon_1(h)||h||\big)}^{\alpha(h)}+\overbrace{\epsilon_2\big(L(h)+\epsilon_1(h)||h||\big)\left|\left|L(h)+\epsilon_1(h)||h||\right|\right|}^{\beta(h)}}_{o(||h||)?}$$

$$\frac{\alpha(h)}{||h||}=\frac{||h||M\big(\epsilon_1(h)\big)}{||h||}=M\big(\epsilon_1(h)\big)$$

$$\left|\left|\frac{\alpha(h)}{||h||}\right|\right|\le ||M||||\epsilon_1(h)||\xrightarrow[h\to 0]{}0\Rightarrow \alpha(h)=o\big(||h||\big)_{,h\to 0}$$

$$\left|\left|L(h)+\epsilon_2(h)||h||\right|\right|\le ||L(h)||+||\epsilon_1(h)||||h||\le ||L||||h||+||\epsilon_1(h)||||h||$$

$$\frac{||\beta(h)||}{||h||}\le\frac{\left|\left|\epsilon_2\big(L_1(h)+\epsilon_1(h)\big)||h||\right|\right|}{||h||}\big(||L||||h||+||\epsilon_1(h)||||h||\big)$$

$$=\left|\left|\epsilon_2(L((h))+\epsilon_2(h)||h||\right|\right|\big(||L||+||\epsilon_1(h)||\big)\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

$$\Rightarrow \beta(h)=o\big(||h||\big)_{,h\to 0}$$

כלומר: $g(a+h)=g(a)+M\big(L(h)\big)+o\big(||h||\big)_{h\to 0}$

ולכן g דיפ' ב-a ומתקיים $df_b\big(du_a(h)\big)=dg_a(h)$

נוסחה למטריצת יעקובי

$$\boxed{J_{f\circ u}(a)=J_f(u(a)*J_u(a)}$$

כלל שרשרת לנגזרות

$$g=f\circ u\,;l=1$$

$$g(x_1,\dots,x_n)=f\big(u_1(x_1,\dots,x_n),\dots,u_m(x_1,\dots,x_n)\big)$$

$$J_g(a)=J_f\big(u(a)\big)J_u(a)$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial g}{\partial x_n}(a)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\big(u(a)\big),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_m}\big(u(a)\big)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial u_m}{\partial n}(a)\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x_k}(a)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_i}\big(u(a)\big)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}(a)\\ *\,g'_{x_k}=f'_{u_1}u'_{1,x_k}+\dots+f'_{u_m}u'_{m,x_k}\end{array}}$$

*יש להיזהר לא להתבלבל עם הצבות, ב-f'_{u_j} מציבים $u(a)$ וב-u'_{j,x_j} מציבים a.

תרגילים

1)

$$g(x,y,z)=f\left(\overbrace{x+y+z}^{u},\overbrace{x^2+y^3+z^4}^{v}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}(x+y+z,x^2+y^3+z^4)+\frac{\partial f}{\partial v}(x+y+z,x^2+y^3+z^4)2x$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial u}(\ ,)+\frac{\partial f}{\partial v}(\ ,)3y^3$$

2) $g(x,y,z)=f(xyz)$

$$f(u);u=xyz$$
$$g'_x(x,y,z)=f'_x(xyz)yz$$

הגדרה

$f(x_1,\dots,x_n)$ הומוגנית מסדר m אם $\forall\lambda\in\mathbb{R}:f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)=\lambda^m f(x_1,\dots,x_n)$

נניח f דיפ', אזי: f הומו' מסדר m $\Leftrightarrow$ $\frac{x_1\partial f}{\partial x_1(x)}+\cdots+x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=mf(x)$ (משוואת אויילר ממד"ח).

הוכחה

$\Leftarrow$

$$f(\lambda x)=\lambda^m f(x)$$
$$\frac{d}{d\lambda}f(\lambda x)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n=m\lambda^{m-1}f(x)$$
$$\lambda=1\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=mf(x)$$

$\Rightarrow$

$$\lambda^{-m}f(\lambda x)=const\Leftrightarrow\frac{f}{d\lambda}(\lambda^{-m}f(\lambda x)=0?$$
$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x)+\lambda^{-m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\lambda x)x_1+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\lambda x)x_n\right)=$$
$$-m\lambda^{-m-1}f(\lambda x)+\lambda^{-m-1}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}_{mf(\lambda x)}\right)=0$$
$$\lambda=1:f(x)=c\Rightarrow\frac{f(\lambda x)}{\lambda^m}=f(x)$$

דוגמאות

$$f(x,y)=x+y,f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$