אינפי 1 – מדמ"ח – פתרון תרגיל 4

1. מצאו את משוואת המשיק של הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=a$. <u>את הגזירות יש לבצע לפי הגדרת הנגזרת בלבד</u>:

I. $f(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$, $a=1$ **.**

יהי $\Delta x\approx 0,\Delta x\neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{(x+\Delta x)^4-(x+\Delta x)^3+(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)+1-(x^4-x^3+x^2-x+1)}{\Delta x}=$$

$$\frac{x^4+4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+3x\Delta x^3+\Delta x^4-x^3-3x^2\Delta x-3x\Delta x^2-\Delta x^3+x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x-\Delta x+1-x^4+x^3-x^2+x-1}{\Delta x}$$

$$=\frac{4x^3\Delta x+6x^2\Delta x^2+3x\Delta x^3+\Delta x^4-3x^2\Delta x-3x\Delta x^2-\Delta x^3+2x\Delta x+\Delta x^2-\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=4x^3+6x^2\Delta x+3x\Delta x^2+\Delta x^3-3x^2-3x\Delta x-\Delta x^2+2x+\Delta x-1$$

כעת נוכל לקחת חלק סטנדרטי ונקבל: $\frac{dy}{dx}=4x^3-3x^2+2x-1$.

לכן השיפוע של המשיק בנקודה $x=1$ הוא $m=2$. לכן בנקודה $(x_0,y_0)=(1,1)$ משוואת המשיק היא: $y-1=2(x-1)$ כלומר $y=2x-1$.

II. $f(x)=\sqrt[3]{x+4}$, $a=4$ **.**

יהי $\Delta x\approx 0,\Delta x\neq 0$. נחשב את $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x+4}-\sqrt[3]{x+4}}{\Delta x}=\frac{(\sqrt[3]{x+\Delta x+4}-\sqrt[3]{x+4})(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2})}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2})}=$$

$$=\frac{\Delta x}{\Delta x(\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2})}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x+4)^2}+\sqrt[3]{x+\Delta x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2}}$$

.

כעת ניתן לקחת חלק סטנדרטי:

$st(\ldots)=\frac{1}{\sqrt[3]{(x+4)^2}+\sqrt[3]{x+4}\sqrt[3]{x+4}+\sqrt[3]{(x+4)^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}$, כלומר $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}$.

לכן בנקודה $x=4$ השיפוע הוא $m=\frac{1}{12}$. לכן בנקודה $(x_0,y_0)=(4,2)$ משוואת המשיק היא: $y-2=\frac{1}{12}(x-4)$ כלומר $y=\frac{1}{12}x+\frac{5}{3}$.

2. מצאו את הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ (השתמשו בכללי גזירה שלמדנו):

I. $f(x)=(2x+3)^6(x^2-x-1)$

נסמן $u=(2x+3)^6$ ואז $u'=6(2x+3)^5\cdot 2$, וכן $v=x^2-x-1$ ואז $v'=2x-1$, לכן:

$$f'=u'v+uv'=12(2x+3)^5(x^2-x-1)+(2x+3)^6(2x-1)$$

II. $f(x)=\frac{4x^3-3x^2+x-3}{6x^4-16}$

נסמן $u=4x^3-3x^2+x-3$ ואז $u'=12x^2-6x+1$, וכן $v=6x^4-16$ ואז $v'=24x^3$, לכן:
$f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}=\frac{(12x^2-6x+1)(6x^4-16)-24x^3(4x^3-3x^2+x-3)}{(6x^4-16)^2}$.

III. $f(x)=(((2x+3)^4+5)^6+7)^8$.

$$\begin{aligned}f'(x)&=8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7(((2x+3)^4+5)^6+7)'=\\&=8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5((2x+3)^4+5)'=\\&=8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5 4(2x+3)^3(2x+3)'=\\&=8(((2x+3)^4+5)^6+7)^7 6((2x+3)^4+5)^5 4(2x+3)^3 2\end{aligned}$$

IV. $f(x)=\frac{((x+1)^2+1)^2}{(x^2-3x-3)^{20}}$.

נסמן $u=((x+1)^2+1)^2$ ואז $u'=4((x+1)^2+1)(x+1)$, וכן $v=(x^2-3x-3)^{20}$ ואז $v'=20(x^2-3x-3)^{19}(2x-3)$.
לכן:

$f'=\frac{u'v-v'u}{v^2}=\frac{4((x+1)^2+1)(x+1)(x^2-3x-3)^{20}-20(x^2-3x-3)^{19}(2x-3)((x+1)^2+1)^2}{(x^2-3x-3)^{40}}$.

3. מצאו את ϵ (התלוי בנקודה x וב- dx) המקיים $\Delta y=dy+\epsilon dx$ עבור הפונקציות $f(x)$ הבאות:

I. $f(x)=7x-9$

$\frac{7(x+\Delta x)-9-(7x-9)}{\Delta x}=\frac{7\Delta x}{\Delta x}=7$. כלומר החלק הסטנדרטי (הנגזרת) הוא 7 ולא נשאר כלום – כלומר $\epsilon=0$. (הגיונית, זהו קו ישר לכן המשיק שלו בכל נקודה הוא הוא עצמו).

II. $f(x)=x^5$

$$\frac{(x+\Delta x)^5-x^5}{\Delta x}=\frac{x^5+5x^4\Delta x+10x^3\Delta x^2+10x^2\Delta x^3+5x\Delta x^4+\Delta x^5-x^5}{\Delta x}=$$
$$=\frac{5x^4\Delta x+10x^3\Delta x^2+10x^2\Delta x^3+5x\Delta x^4+\Delta x^5}{\Delta x}=5x^4+10x^3\Delta x+10x^2\Delta x^2+5x\Delta x^3+\Delta x^4$$

כלומר החלק הסטנדרטי (הנגזרת) הוא $5x^4$ וההפרש הוא $\epsilon=10x^3\Delta x+10x^2\Delta x^2+5x\Delta x^3+\Delta x^4$.

4. תהיינה u,v,w פונקציות גזירות של המשתנה x, ותהי $y=uvw$. בטאו את $\frac{dy}{dx}$ באמצעות $u,v,w,\frac{du}{dx},\frac{dv}{dx},\frac{dw}{dx}$.

נסמן $q=uv$. מתקיים: $q'=(uv)'=u'v+uv'$. לכן
$y'=(uvw)'=(qw)'=q'w+qw'=(u'v+uv')w+uvw'=u'vw+uv'w+uvw'$.
או באמצעות צורת הכתיבה האחרת שלמדנו נקבל:
$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}vw+u\frac{dv}{dx}w+uv\frac{dw}{dx}$.

5. תהיינה u,v פונקציות גזירות של המשתנה x, ותהי $y=\frac{u^2}{v(u-v+1)^4}$. בטאו את $\frac{dy}{dx}$ באמצעות $u,v,\frac{du}{dx},\frac{dv}{dx}$.

נסמן $f=u^2$, $g=v(u-v+1)^4$, ואז:
$f'=2uu'$, $g'=v'(u-v+1)^4+v4(u-v+1)^3(u'-v')$.

לכן:

$$y'=\frac{f'g-fg'}{g^2}=\frac{2uu'v(u-v+1)^4-u^2(v'(u-v+1)^4+4v(u-v+1)^3(u'-v'))}{v^2(u-v+1)^8}.$$

או באמצעות צורת הכתיבה האחרת שלמדנו נקבל:

$$y'=\frac{f'g-fg'}{g^2}=\frac{2u\frac{du}{dx}v(u-v+1)^4-u^2(\frac{dv}{dx}(u-v+1)^4+4v(u-v+1)^3(\frac{du}{dx}-\frac{dv}{dx}))}{v^2(u-v+1)^8}$$