משוואות ליניאריות עם מקדמים "כמעט אנליטיים (מסדר שני)

דוגמה

$$\boxed{9x^2y'' + (x+2)y = 0}$$

המשוואה בצורה נורמלית:

$$y'' + \frac{x+2}{9x^2}y = 0$$

נבדוק את הנקודה 0.

המקדמים הם:

$$p(x) = 0$$

$$q(x) = \frac{x+2}{9x^2}$$

$p(x)$ אנליטי ו- $x^2q(x)$ אנליטי.

לכן, 0 נקודה סינגולרית רגולרית, ועפ"י משפט פרוביניוס, קיים פתרון מהצורה:

$$y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

כאשר:

$$a_0 \neq 0$$

לכן:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2}$$

לכן:

$$9x^2y'' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} 9(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha}$$

נציב במשוואה:

$$[9\alpha(\alpha-1)+2]a_0x^\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}[9(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n + a_{n-1} + 2a_n]\cdot x^{n+\alpha} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^{n+\alpha}$$

המשוואה:

$$9\alpha(\alpha-1)+2 \quad = \quad 0$$

נקראת משוואת האינדקס.

<u>שלב א'</u>: משוואת האינדקס הנובעת מהדרגה הנמוכה ביותר של x שמובילה במשוואה, יחד עם ההנחה $a_0 \neq 0$, מביאה למשוואה אלגברית ריבועית עבור α.

<u>שלב ב'</u>: הצבת כל ערכי α וחישוב הרקורסיה.

כאן:

$$9\alpha^2 - 9\alpha + 2 \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{1,2} \quad = \quad \frac{9 \pm \sqrt{9}}{18}$$

$$\alpha_{1,2} \quad = \quad \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}$$

<u>עבור $\alpha = \frac{1}{3}$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$\left[9\left(n+\frac{1}{3}\right)\left(n-\frac{2}{3}\right)+2\right]a_n \quad = \quad -a_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \quad = \quad -\frac{a_{n-1}}{(3n+1)(3n-2)+2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{9n^2 - 3n}$$

<u>עבור $\alpha = \frac{2}{3}$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$\left[9\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n-\frac{1}{3}\right)+2\right]a_n = -a_{n-1}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{(3n+2)(3n-1)+2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{9n^2 + 3n}$$

■

דוגמה

$$\boxed{4xy'' + 2y' + y = 0}$$

0 נקודה סינגולרית רגולרית.

נציב:

$$y = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha}$$

לכן:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\alpha) a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$y'' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-2}$$

לכן:

$$2y' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}2(n+\alpha)a_n x^{n+\alpha-1}$$

$$4xy'' \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}4(n+\alpha)(n+\alpha-1)a_n x^{n+\alpha-1}$$

נציב במשוואה:

$$[2\alpha+4\alpha(\alpha-1)]a_0x^\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}[4(n+1+\alpha)(n+1+\alpha-1)a_{n+1}+2(n+1+\alpha)a_{n+1}+a_n]\cdot x^{n+\alpha} \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty}0\cdot x^{n+\alpha}$$

משוואת האינדקס:

$$4\alpha^2-2\alpha \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{1,2} \quad = \quad 0\,,\ \frac{1}{2}$$

<u>עבור $\alpha=0$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$[4(n+1)n+2(n+1)]a_{n+1}+a_n \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$[4n^2+6n+2]a_{n+1}+a_n \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$(n+1)(4n+2)a_{n+1}+a_n \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} \quad = \quad -\frac{a_n}{(n+1)(4n+2)}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} \quad = \quad -\frac{a_n}{(2n+1)(2n+2)}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n \quad = \quad \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$$

$$\Downarrow$$

$$y \quad = \quad a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$y \quad = \quad a_0 \cos\left(\sqrt{x}\right)$$

<u>עבור $\alpha = \frac{1}{2}$</u>:

נשווה מקדמים של x^n:

$$\left[4\left(n+\frac{3}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+2\left(n+\frac{3}{2}\right)\right]a_{n+1}+a_n \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)(4n+4)\right]a_{n+1}+a_n \quad = \quad 0$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} \quad = \quad -\frac{a_n}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$\Downarrow$$

$$a_{n+1} \quad = \quad \frac{(-1)^n a_0}{(2(n+1)+1)!}$$

$$\Downarrow$$

$$y = a_0 \cdot x^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{(2n+1)!}$$

$$\Downarrow$$

$$y = a_0 \sin\left(\sqrt{x}\right)$$

לכן, הפתרון הכללי:

$$y = c_1 \cos\sqrt{x} + c_2 \sin\sqrt{x}$$

$$\blacksquare$$

משוואת בסל

$$\boxed{x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad , \quad \nu \in \mathbb{R}}$$