גבולות

לפני שנעבור להגדרת הגבול, היזכרו בכללים הבאים עבור מספרים היפר-ממשיים.

יהיו ε,δ אינפיניטסימלים; יהיו b,c מספרים היפר-ממשיים סופיים שאינם אינפי' ויהיו H,K מספרים היפר-ממשיים אינסופיים. אזי:

1. מספרים ממשיים: - כל מספר ממשי הוא סופי - האינפיניטסימל הממשי היחיד הוא אפס **2. מספרים נגדיים:** - $(-\varepsilon)$ הוא אינפיניטסימל - $(-b)$ הוא סופי שאינו אינפי' - $(-H)$ הוא אינסופי **3. מספרים הופכיים:** - אם $\varepsilon\neq 0$ אזי $\frac{1}{\varepsilon}$ הוא אינסופי - $\frac{1}{b}$ הוא סופי שאינו אינפי' - $\frac{1}{H}$ הוא אינפי' **4. סכום:** - $\varepsilon+\delta$ הוא אינפי' - $b+\varepsilon$ הוא סופי שאינו אינפי' - $b+c$ הוא סופי (יכול להיות אינפי') - $H+b,\ H+\varepsilon$ הם אינסופיים	**5. מכפלה:** - $\varepsilon\delta,\ \varepsilon b$ הם אינפי' - bc הוא סופי שאינו אינפי' - HK, Hb הם אינסופיים **6. מנה:** - $\frac{\varepsilon}{H},\frac{b}{H},\frac{\varepsilon}{b}$ הם אינפי' - $\frac{b}{c}$ הוא סופי שאינו אינפי' - $\frac{H}{b},\frac{H}{\varepsilon},\frac{b}{\varepsilon}$ הם אינסופיים (בהנחה כי $\varepsilon\neq 0$) **7. שורשים:** לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: - אם $\varepsilon>0$ אזי $\sqrt[n]{\varepsilon}$ הוא אינפי' - אם $b>0$ אזי $\sqrt[n]{b}$ הוא סופי שאינו אינפי' - אם $H>0$ אזי $\sqrt[n]{H}$ הוא אינסופי

מהכללים הנ"ל אנו מקבלים את כללי החלק הסטנדרטי:

יהיו $a,b\in\mathbb{R}^*$ שני מספרים היפר-ממשיים **סופיים**. אזי:

1. $st(-a)=-st(a)$ 2. $st(a+b)=st(a)+st(b)$ 3. $st(a-b)=st(a)-st(b)$ 4. $st(a\cdot b)=st(a)\cdot st(b)$	5. אם $st(b)\neq 0$ אז $st\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{st(a)}{st(b)}$ 6. לכל $n\in\mathbb{N}$: $st(a^n)=(st(a))^n$ 7. אם $a\geq 0$ אז $st(\sqrt[n]{a})=\sqrt[n]{st(a)}$ 8. אם $a\leq b$ אזי $st(a)\leq st(b)$

גבול (סופי) בנקודה

הגדרה: נאמר ש- $\lim_{x\to c} f(x) = L$ אם לכל $x \in \mathbb{R}^*$ מתקיים: $c \neq x \approx c \Rightarrow f(x) \approx L$.

חישוב: $\lim_{x\to c} f(x) = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(f(c+\Delta x)\right)$.

דוגמה

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{(1+\Delta x)^2+(1+\Delta x)-2}{(1+\Delta x)^2-1}\right) = \underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{3+\Delta x}{2+\Delta x}\right) = \frac{3}{2}.$$

גבולות חד-צדדיים

הגדרה (גבול מימין): נאמר ש- $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ אם לכל $x \in \mathbb{R}^*$ מתקיים:
$c < x \approx c \Rightarrow f(x) \approx L$.

חישוב: $\lim_{x\to c^+} f(x) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(f(c+\Delta x)\right)$.

הגדרה (גבול משמאל): נאמר ש- $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ אם לכל $x \in \mathbb{R}^*$ מתקיים:
$c > x \approx c \Rightarrow f(x) \approx L$.

חישוב: $\lim_{x\to c^-} f(x) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(f(c+\Delta x)\right)$.

דוגמאות

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x-1} = \underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{|1+\Delta x-1|}{1+\Delta x-1}\right) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta x}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x-1} = \underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{|1+\Delta x-1|}{1+\Delta x-1}\right) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{|\Delta x|}{\Delta x}\right) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{-\Delta x}{\Delta x}\right) = -1$$

משפט (הקשר בין גבול לגבולות חד-צדדיים):

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ אמ"מ $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = L$.

למשל, הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$ אינו קיים, שכן הגבולות החד-צדדיים אמנם קיימים, אך שונים.

גבולות אינסופיים

הגדרות

יהיו $c, L \in \mathbb{R}$.

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ אם: **לכל** מספר היפר-ממשי אינסופי חיובי H, מתקיים $f(H) \approx L$.

   כלומר: $\lim_{x\to\infty} f(x) = st(f(H))$, עבור H אינסופי חיובי.

   באופן דומה מגדירים $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$.

2. $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ אם: לכל x המקיים $c \neq x \approx c$, הביטוי $f(x)$ הוא אינסופי חיובי.

   באופן דומה מגדירים $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$.

דוגמאות

1. נחשב $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

   יהי $x = \Delta x$ עבור $0 > \Delta x \approx 0$. אזי $\sqrt[3]{\Delta x}$ הוא אינפי' שלילי, ולכן $\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ הוא אינסופי שלילי. לכן $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$.

2. נחשב $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x-1}$.

   יהי $x = H$ עבור H אינסופי חיובי. אזי $\frac{\cos H}{H-1} = \frac{\text{סופי}}{\text{אינסופי}} = \text{אינפי'}$

   ולכן $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x-1} = st\left(\frac{\cos H}{H-1}\right) = 0$.

3. הגבול $\lim_{x\to\infty} x\cos x$ אינו קיים. נוכיח זאת על-ידי כך שנראה כי הגבול תלוי בבחירת מספר אינסופי H.

   נסמן $f(x) = x\cos x$.

   יהי K מספר היפר-שלם אינסופי חיובי.

   אם $H = 2\pi K$, אזי $\cos H = 1$ ומכאן: $f(H) = H\cos H = H$ ולכן $\lim_{x\to\infty} x\cos x = \infty$.

   מצד שני, אם $H = \frac{\pi}{2} + \pi K$ אזי $\cos H = 0$ ומכאן:

   $f(H) = H\cos H = H \cdot 0 = 0$ ולכן $\lim_{x\to\infty} x\cos x = 0$.

   מכיוון ש-$f(H)$ תלוי בבחירת H, נסיק כי הגבול אינו קיים.

רציפות

<u>הגדרה</u>: f **רציפה** בנקודה $c\in\mathbb{R}$ אם f מוגדרת ב-c ולכל $x\in\mathbb{R}^*$ מתקיים: $x\approx c\Rightarrow f(x)\approx f(c)$.

<u>משפט</u>: f רציפה בנקודה $c\in\mathbb{R}$ אמ"מ $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$.

<u>בדיקת רציפות בנקודה</u> $c\in\mathbb{R}$

- האם הביטוי $f(c)$ מוגדר? אם לא, הפונקציה אינה רציפה ב-c. אם כן – ממשיכים לשלב הבא.
- האם הגבול $\lim\limits_{x\to c}f(x)$ קיים? אם לא, הפונקציה אינה רציפה ב-c. אם כן – ממשיכים לשלב הבא.
- האם $\lim\limits_{x\to c}f(x)=f(c)$? אם לא, הפונקציה אינה רציפה ב-c. אם כן – הפונקציה רציפה ב-c.

<u>דוגמאות</u>

1. האם $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}$ רציפה ב-$x=1$?

<u>תשובה</u>: לא, כי $f(1)$ אינו מוגדר.

2. האם $f(x)=\begin{cases}\frac{2x-1}{x-1} & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ רציפה ב- $x=1$?

<u>תשובה</u>: $f(1)$ מוגדר ומתקיים $f(1)=2$, לכן נבדוק את הגבול.

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}f(1+\Delta x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{2(1+\Delta x)-1}{1+\Delta x-1}\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{1+2\Delta x}{\Delta x}\right)$$

הביטוי $\frac{1+2\Delta x}{\Delta x}$ הוא אינסופי ולכן אין לו חלק סטנדרטי. לכן, הגבול $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ אינו קיים, והפונקציה אינה רציפה ב-$x=1$.

3. האם $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x-1} & x\leq 0\\ x-2 & x>0\end{cases}$ רציפה ב-$x=0$?

<u>תשובה</u>: הפונקציה מוגדרת ב-$x=0$, ולכן נבדוק גבול.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}f(0+\Delta x)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}f(\Delta x)$.

מכאן חייבים לפצל למקרים, מכיוון שאנו לא יודעים באיזה חלק של f להציב את Δx, שכן אנו לא יודעים מה הסימן של Δx.

א. $\Delta x>0$

במקרה זה אנו מחשבים, למעשה, את הגבול הימני:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \underset{0<\Delta x\approx 0}{st}(\Delta x - 2) = -2 .$$

ב. $\Delta x < 0$

במקרה זה אנו מחשבים גבול משמאל:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\Delta x + 2}{\Delta x - 1}\right) = -2 .$$

כעת רואים שמתקיים $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$ ולכן הגבול $\lim_{x\to 0} f(x)$ קיים.

נותר לבדוק שהוא שווה לערך הפונקציה בנקודה, ואכן מתקיים

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -2 = f(0) .$$

לסיכום, הפונקציה רציפה ב-$x=0$.

<u>הערה</u>: הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} & x \le 0 \\ x-2 & x > 0 \end{cases}$ רציפה, למעשה, בכל $\mathbb{R}$. ואכן, היא רציפה עבור $x<0$ שכן היא פונקציה רציונלית שהמכנה שלה לא מתאפס בתחום הנתון. היא רציפה עבור $x>0$ שכן היא פולינום, והיא רציפה ב-$x=0$ כפי שהוכחנו לעיל.

גזירות

<u>הגדרה:</u> f **גזירה** בנקודה $c\in\mathbb{R}$ אם הביטוי $st\left(\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ **קיים וסופי לכל** $0\neq\Delta x\approx 0$ **ואינו תלוי** ב- Δx.

במקרה זה מתקיים $f'(c)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\right)$.

<u>**דוגמה**</u>

האם $f(x)=\begin{cases}\frac{x+2}{x-1} & x\le 0\\ x-2 & x>0\end{cases}$ גזירה בנקודה $x=0$?

<u>פתרון:</u>

נחשב את הנגזרת על-פי ההגדרה:

$$f'(0)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\right)=\underset{0\neq\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(\Delta x)+2}{\Delta x}\right)$$

מכיוון שאנו לא יודעים את הסימן של Δx, עלינו לפצל למקרים.

א. $\Delta x>0$

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(\Delta x)+2}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{(\Delta x-2)+2}{\Delta x}\right)=1$$

ב. $\Delta x<0$

$$\underset{0>\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{f(\Delta x)+2}{\Delta x}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{\left(\frac{\Delta x+2}{\Delta x-1}\right)+2}{\Delta x}\right)=$$

$$\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{3\Delta x}{\Delta x(\Delta x-1)}\right)=\underset{0<\Delta x\approx 0}{st}\left(\frac{3}{\Delta x-1}\right)=-3$$

בשלב זה רואים שהנגזרת תלויה ב- Δx, ולכן f אינה גזירה בנקודה $x=0$.

גבולות מיוחדים וצורות בלתי מוגדרות

נסמן ב- H,K מספרים אינסופיים וב- ε,δ מספרים אינפיניטסימלים.

הצורות הבאות אינן מוגדרות:

<u>במונחי גבולות</u>

$$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^{\infty},\infty-\infty,0^{0},\infty^{0}$$

(שימו לב: לא מדובר במספר 0 או במספר 1, אלא בגבולות ששואפים ל-0 ול-1.)

<u>למשל</u>, הגבולות הבאים הם מצורה בלתי מוגדרת:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+5},\ \lim_{x\to0}(x+1)^{\frac{1}{x^4}},\ \lim_{x\to\infty}(\ln x)^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

<u>במונחים היפר-ממשיים</u>

$$\frac{\varepsilon}{\delta},\frac{H}{K},\varepsilon\cdot H,(1+\Delta x)^{H},H-K,\varepsilon^{\delta},H^{\varepsilon}$$

בכל אחד מהמצבים הנ"ל יש להתמודד עם כל מקרה לגופו.

⚠ **שימו לב**: אם יש לכם צורה בלתי מוגדרת במונחים היפר-ממשיים ואתם לא יודעים איך להתמודד איתה, נסו <u>לעבור לגבול המתאים</u> ולהיעזר בשיטות שפיתחנו עבור חישוב גבולות (למשל: לופיטל).

<u>דוגמה</u>:

נניח שאנו תקועים עם ביטוי מהצורה $\varepsilon\cdot\ln\varepsilon^2$ עבור $0<\varepsilon\approx0$. זהו ביטוי מהצורה אינפי*אינסופי ולכן אנחנו עוד לא יכולים לקבוע איזה מן מספר זה.

במצב זה נעבור לגבול המתאים: $\lim_{x\to0^+}x\ln x^2$. זהו גבול מהצורה $0\cdot\infty$ ולכן נוכל לכתוב אותו קצת אחרת ולהיעזר בלופיטל.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x^2=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x^2}{\left(\frac{1}{x}\right)}\underset{\text{l'Hopital}}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to0^+}(-2x)=0.$$

לכן: $\varepsilon\cdot\ln\varepsilon^2$ הוא אינפי.

הצעות להתמודדות עם הצורות הלא מוגדרות

- במקרים $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ כדאי לעשות לופיטל.
- את המקרה $0\cdot\infty$ כדאי להפוך לאחד מהמקרים $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$ ואז להיעזר בלופיטל.
- במקרים $1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$ כדאי להיעזר בזהות $x = e^{\ln x}$ ולכתוב את הגבולות אחרת, ואז להתאים ללופיטל.
- במקרה $\infty - \infty$ כדאי לנסות להוציא גורם משותף (או, אם יש, מכנה משותף).

גבולות מוכרים שכדאי לזכור

פונקציות טריגונומטריות	פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^{x}=e^{c}$:$c\in\mathbb{R}$ לכל
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{+}}\tan x=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}\tan x=\infty$	$\lim\limits_{x\to\infty}a^{x}=\begin{cases}\infty & 1<a\\ 0 & 0<a<1\end{cases}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x\to-\infty}a^{x}=\begin{cases}0 & 1<a\\ \infty & 0<a<1\end{cases}$
$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$	

- **שימו לב**: הרשימה הנ"ל אינה ממצה, ויש עוד גבולות חשובים שכדאי לזכור (או לדעת איך לקבל בזמן אמת).
- אם תכירו את הגרפים של הפונקציה המתאימות, יהיה לכם הרבה יותר קל לזכור את מרבית הגבולות הנ"ל.

<u>הערה חשובה</u>:

יש המון צורות של גבולות. חלק מהצורות הוכחנו (ראו כללים בעמוד 1) וחלק מהצורות הן בלתי מוגדרות (ראו עמוד 7). **אבל**, יש עוד המון צורות מוגדרות שלא הוכחנו, ולכן אם אתם נתקלים בצורה שאין עבורה כלל ברור, זה לא אומר שזו צורה בלתי מוגדרת, ופשוט צריך להמשיך לפתור.
יש המון צורות מוגדרות נוספות שראינו בהרצאות ובתרגולים, ואין צורך לזכור את כולן.

<u>לדוגמה</u>, לא ניסחנו כלל ברור עבור הצורה 0^∞ (או $\text{אינפי}^{\text{אינסוף}}$), למרות שהצורה הזאת מוגדרת. לכן בכל פעם שאתם מקבלים גבול מהצורה הזאת, אם אתם לא זוכרים מה יוצא, פשוט פתרו את התרגיל באחת השיטות שלמדנו.

<u>למשל</u>, $\lim_{x\to0^+} x^{\frac{1}{x}} \overset{(0^\infty)}{=} \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x}} = 0$ שכן, לפי כלל 6 בעמוד 1, מתקיים: $\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x} = \frac{-\text{infinity}}{\text{infi}} = -\text{infinity}$.

שאלות לתרגול עצמי

שאלה 1

האם הפונקציה $f(x)=\begin{cases}4x-2 & x\le 1\\ 2x^2 & x>1\end{cases}$ רציפה ב- $\mathbb{R}$? האם היא גזירה ב- $\mathbb{R}$?

שאלה 2

לאילו ערכי $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ הפונקציה הבאה גזירה?

$$f(x)=\begin{cases}ax^2+b & x<1\\ cx+d & 1\le x<3\\ (x-4)^2-1 & x\ge 3\end{cases}$$

שאלה 3

חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{2\cos x-1}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

ג. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

ד. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

ה. $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$

ו. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x}}{x}$

שאלה 4

תהי f פונקציה ממשית ויהי $L \in \mathbb{R}$.

א. הוכיחו: $\lim_{x\to0} f\left(x^3\right) = L$ אם ורק אם $\lim_{x\to0} f\left(x\right) = L$.

ב. נתבונן בטענה הבאה:

$\lim_{x\to0} f\left(x^2\right) = L$ אם ורק אם $\lim_{x\to0} f\left(x\right) = L$.

האם זו טענה נכונה? אם כן – הוכיחו; אם לא – הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 5

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות קבעו באילו נקודות f רציפה ובאילו נקודות היא גזירה. הוכיחו את תשובתכם!

א. $$f\left(x\right) = \begin{cases} \left(1-e^{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ב. $$f\left(x\right) = \begin{cases} x^{\sin x} & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \end{cases}.$$

ג. $$f\left(x\right) = \begin{cases} x \cdot e^{-\frac{1}{x}} \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x > 0 \\ \sqrt[3]{x^5 + x^4} & x \leq 0 \end{cases}$$

עבודה נעימה!

נ.ב. – אם אתם עדיין לא מכירים, יש כמה אתרים נחמדים שבהם אפשר לבדוק את התשובות שלכם.

הנה שניים לדוגמה:

1. Symbolab: מעולה לחישוב גבולות, בדיקת התכנסות של סדרות וטורים וכן לחקירה (למשל, הוא יודע לחשב נקודות קיצון ונקודות פיתול של פונקציה).
2. Desmos Graphing Calculator: מעולה לציור פונקציות (עוזר לבדוק את תשובתכם לשאלה 5, למשל, כי בגרף קל מאוד לראות אם הפונקציה רציפה/גזירה). אגב, אחת התכונות המעולות של התוכנה הזאת, היא העובדה שהיא יודעת לצייר פונקציות מפוצלות על אותו גרף.