שאלה 3 מועד ב 2018

(א) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

לופיטל

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\cos x=1$$

לכן f רציפה בקטע סגור וגזירה בו ונקבל ש:

$$f'(x)=\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}=0 \to x\cos x=\sin x \to x=0$$

$$f''(x)=-\frac{\sin x}{x}-\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\cos x}{x^2}+\frac{2x\sin x}{x^4}\Big|_{x=0}<0$$

$x=0 \Leftarrow$ מקסימום

הפונקציה מקבלת מקסימום: לכן $\forall x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\ x\neq 0:\ \frac{2}{\pi}\leq\frac{\sin x}{x}<1$

(ב) נתון קטע סגור $A=[a,b]$

לכל x בקטע קיים n_0 כך ש- $\frac{x}{n}\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

לכן לפי סעיף א:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x}{n^2}\leq\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\leq\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{x}{n^2}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\max\{|a|,|b|\}}{n^2}$$

הטורים מצד ימין ושמאל מתכנסים ולכן הטור החסום על ידיהם מתכנס לכל x בקטע.
בנוסף, לפי מבחן ה M הטור מתכנס במ"ש בקטע.

$$\left[\ \sup_{x\in[a,b]}\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}\right|\leq\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\max\{|a|,|b|\}}{n^2}\xrightarrow[k\to\infty]{}0\ ;\quad k\geq n_0 \quad \text{כי: } \limsup\ \right]$$

(ג) ~~[illegible]~~, מספיק להראות כי היא רציפה בכל קטע סגור שרירותי $[a,b]\subset\mathbb{R}$
וזה נכון כיון שזו סדרת פ' רציפות המתכנסת במ"ש שם. לכן פ' הגבול רציפה בכל קטע סגור. ומכיון שבחרנו את כל הישר הממשי.