פתרון תרגיל 5 מד"ר קיץ תשע"ו

5 באוגוסט 2016

1. המשוואה המאפיינת היא:

$$\det\left(\lambda I-\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{pmatrix}\right)=0$$

נפתח לפי השורה הראשונה ונקבל:

$$(\lambda-1)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right)=0$$

כלומר, $\lambda=1,1\pm 2i$. נמצא וקטורים עצמיים. עבור $\lambda=1$:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&-2\\3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=0$$

ונקבל $v_3=v_1, v_2=-\frac{3}{2}v_1$, ולכן אפשר לבחור:

$$v=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$$

ולכן פתרון פרטי אחד הוא:

$$\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}e^t$$

עבור $\lambda=1+2i$ (אין טעם לבדוק גם לצמוד):

$$\begin{pmatrix}-2i&0&0\\2&-2i&-2\\3&2&-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$$

ונקבל $v_1 = 0, v_2 = iv_3$, ולכן אפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$$

והפתרונות הפרטיים המתאימים הם:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+2i)t}$$

כלומר:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^t$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^t + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix} e^t$$

2. נפתור בדרך דומה לשאלה הראשונה.

(א) המשוואה המאפיינת היא:

$$\det \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 3 \\ -8 & \lambda + 6 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר:

$$\lambda (\lambda + 2) = 0$$

ולכן $\lambda = 0, -2$. נמצא וקטורים עצמיים. עבור $\lambda = 0$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

ונקבל $4v_1 = 3v_2$, ולכן אפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

והפתרון הפרטי המתאים הוא:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} e^{0\cdot t} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

עבור $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

ולכן $v_2 = 2v_1$, ולכן אפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

והפתרון הפרטי המתאים הוא:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

(ב) המטריצה אלכסונית וקל לראות שהע"ע הוא 1 עם ריבוי גיאומטרי 2 (זו מטריצת היחידה, כל וקטור הוא וקטור עצמי).
אפשר לבחור בתור וקטורים עצמיים את וקטורי הבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

הפתרונות הפרטיים המתאימים הם:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

והפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

במקרה זה אין ספק שאפשר לפתור את המשוואות כל אחת בנפרד.

(ג) גם כאן, קל לראות שהע"ע הוא 2, אך הריבוי הגיאומטרי שלו הוא 1 (זו צורת ז'ורדן). במצב כזה, נמצא את הוקטור העצמי:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

כלומר $v_2 = 0$, ולכן אפשר לבחור:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

והפתרון הפרטי המתאים הוא:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

כעת, נחפש פתרון מהצורה:

$$y = \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right) e^{2t} = \begin{pmatrix} at + c \\ bt + d \end{pmatrix} e^{2t}$$

נציב במשוואה כדי למצוא את הקבועים. הנגזרת היא:

$$y' = \begin{pmatrix} 2at + 2c + a \\ 2bt + 2d + b \end{pmatrix} e^{2t}$$

ולכן:

$$y' = \begin{pmatrix} 2at + 2c + a \\ 2bt + 2d + b \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 2at + 2c + bt + d \\ 2bt + 2d \end{pmatrix} e^{2t}$$

לכן $b = 0, a = d$, ואפשר לבחור למשל:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

בתור פתרון פרטי נוסף, ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

3. נציב בכל פעם $y = \sum a_n x^n$.

(א) הנגזרת השנייה היא:

$$y'' = \sum n\left(n-1\right)a_n x^{n-2}$$

ולכן המשוואה היא:

$$\sum n\left(n-1\right)a_n x^{n-2} + x\sum a_n x^n = 0$$

כלומר:

$$\sum n\left(n-1\right)a_n x^{n-2} + \sum a_n x^{n+1} = 0$$

כל המקדמים שווים ל-0.

כעת, עבור k כלשהו, מה המקדם של x^k?

$$\left(k+2\right)\left(k+1\right)a_{k+2} + a_{k-1} = 0$$

ולכן:

$$a_{k+2} = -\frac{a_{k-1}}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$$

נזיז מעט את האינדקסים:

$$a_{k+3} = -\frac{a_k}{\left(k+3\right)\left(k+2\right)}$$

כעת, מהנוסחה לבדה נראה שיש 3 מקדמים חופשיים (a_0, a_1, a_2), אך נשים לב ש$-a_2$ חייב להיות 0 (חשבו למה), ולכן:

$$a_{3n+2} = 0$$

לכל n. בכל אופן, נקבל שהפתרון הוא מהצורה:

$$y = \sum a_{3k}x^{3k} + \sum a_{3k+1}x^{3k+1}$$

כאשר a_0, a_1 חופשיים ומגדירים את שאר מקדמי הטור.

דרך אגב, הנוסחאות לפי מקום הן:

$$a_{3k} = \frac{\left(-1\right)^k}{(3k)!}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(3j-2\right)\cdot a_0$$

$$a_{3k+1} = \frac{\left(-1\right)^k}{(3k+1)!}\cdot\prod_{j=1}^{k}\left(3j-1\right)\cdot a_1$$

(ב) הנגזרות הן:

$$y'' = \sum n(n-1)a_n x^{n-2}, y' = \sum n a_n x^{n-1}$$

ולכן המשוואה היא:

$$\sum n(n-1)a_n x^{n-2} + x^2 \sum n a_n x^{n-1} - 4x \sum a_n x^n = 0$$

כלומר:

$$\sum n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum n a_n x^{n+1} - \sum 4a_n x^{n+1} = 0$$

כל המקדמים שווים ל־0.

כעת, עבור k כלשהו, מה המקדם של x^k?

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + (k-1)a_{k-1} - 4a_{k-1} = 0$$

כלומר:

$$a_{k+2} = \frac{(5-k)a_{k-1}}{(k+1)(k+2)}$$

נזיז מעט את האינדקסים:

$$a_{k+3} = \frac{(4-k)a_k}{(k+2)(k+3)}$$

גם כאן אפשר לראות ש־$a_2 = 0$, ושוב הפתרון הוא:

$$y = \sum a_{3k}x^{3k} + \sum a_{3k+1}x^{3k+1}$$

כאשר a_0, a_1 חופשיים ומגדירים את שאר מקדמי הטור.

4. אלו משוואות אוילר.

(א) המשוואה המאפיינת היא:

$$\lambda(\lambda-1) - 4\lambda + 6 = 0$$

ולכן $\lambda = 2, 3$ והפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$y = C_1x^2 + C_2x^3$$

(ב) זו עוד לא משוואת אוילר, לא לפני שנציב:

$$z = x + 1$$

ואז $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}$, ולכן נוכל להסתכל על המשוואה:

$$z^2 y'' - 3zy' + 4y$$

המשוואה המאפיינת היא:

$$\lambda\left(\lambda - 1\right) - 3\lambda + 4 = 0$$

ולכן $\lambda = 2$ הוא שורש מריבוי 2 והפתרון הכללי הוא מהצורה:

$$y = z^2\left(C_1 + C_2 \ln z\right)$$

כלומר:

$$y = \left(x + 1\right)^2 \left(C_1 + C_2 \ln\left(1 + x\right)\right)$$