תרגול 10

7 אוגוסט, 2016

הערה:

<u>יתרון של אינטרפולציית לגרנז':</u> נשים לב שחישוב $l_i(x)$ אינו תלוי ב- y_i.

כלומר לפו' שדגמנו באותן נק' דגימה ברגע שנחשב את $l_i(x)$, נוכל למצוא את פולינום האינטרפולציה.

<u>חסרונות של אינט' לגרנז':</u> הוספת נק' אחת גורמת לכך שנצטרך לחשב את כל ה-$l_i(x)$ מחדש.

שיטת ניוטון – שיטת הפרשים מחולקים:

הרעיון – בהינתן *n+1* נק' - $(x_0,y_0),\dots,(x_n,y_n)$, שיטת ניוטון בונה את פולינום האינט' באופן הדרגתי שלב אחרי שלב.

בשלב ה- 0 נוודא כי הפו' מקיימת את הנק' (x_0,y_0) ונקבל פולינום מדרגה 0 .

בשלב ה- k נבצע "תיקון" – נשנה את הפולינום כך שיעבור גם בנק' ה- k ע"י התנאי הבא:

$$P_k(x)=P_{k-1}(x)+c_k(x-x_0)\dots(x-x_{k-1})$$

כדי למצוא את c_k נדרוש ש-

$$P_k(x_k)=y_k$$

$$P(x_0)=c_0=y_0$$

דוגמה:

יהי $P_3(x)$ פולינום האינטרפולציה העובר דרך הנק':

$$(0,0),(0.5,4.25),(1,3),(2,2)$$

מצא את $P_3(x)$ עפ"י שיטת ניטון.

פתרון:

עבור $k=0$:

$$P_0(x)=c_0$$
$$P_0(x_0)=y_0=c_0$$
$$0=y_0=P_0(0)=c_0\quad=>\quad c_0=0$$

עבור $k=1$:

$$P_1(x)=P_0(x)+c_1(x-x_0)$$
$$y_1=P_1(x_1)=P_0(x_1)+c_2(x_1-x_0)$$
$$4.25=P_1(0.5)=0+c_1*(0.5-0)$$

$$\frac{1}{2}c_1 = 4.25 \;\; => \;\; c_1 = 8.5$$
$$\boldsymbol{P_1(x)} = 8.5 * (x-0) = \mathbf{8.5x}$$

עבור $k = 2$:

$$P_2(x) = P_1(x) + c_2 * (x-0)(x-\frac{1}{2})$$

$$=> \quad P_2(x) = 8.5x - 11(x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad => \quad \boldsymbol{P_2(x) = -11x^2 + 14x}$$

$$P_3(x) = P_2(x) + c_3 * (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$P_3(x_3) = y_3 = 2$$
$$2 = P_3(2) = P_2(2) + c_3(2-0)\left(2-\frac{1}{2}\right)(2-1)$$
$$2 = -11 * 2^2 + 14 * 2 + 3c_3 \;\; => \quad c_3 = 6$$
$$P_3(x) = P_2(x) + 6 * (x-0)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1) \quad => \quad \boldsymbol{P_3(x) = 6x^3 - 20x^2 + 17x}$$

<u>הערה:</u>

<u>יתרון:</u> הוספת נק' לא מצריכה חישוב מחדש שלו, רק הוספת הקבוע.

<u>חסרון:</u> ייצוג ע"י מטריצה משולשת שקשה יותר לחשב את ההופכית שלה.

<u>הגדרה נוספת של שיטת אינט' ניוטון:</u>

$$P_N(x) = y_0 + y_{10}(x-x_0) + y_{210}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + y_{\mathrm{N}\ldots 10}(x-x_0)(x-x_1) * \ldots * (x-x_{N-1})$$

$$y_{n(n-1)\ldots 0} = \frac{y_{n(n-1)\ldots 1} - y_{n-1\ldots 0}}{x_n - x_0}$$
$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

כאשר את המונה חישבנו בצעדים קודמים והמכנה הם ה - x - ים החיצונים (שבתוך f).

<u>דוגמה:</u>

מצא אינט' ניוטון עם הנקודות הבאות –

$$(0,0), (1,1), (2,4)$$

נבצע את החישובים לפי הנוסחאות הנ"ל –

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{4-1}{2-1} = 3$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{3-1}{2-0} = 1$$

ניתן לכתוב גם בדרך של טבלה:

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_{i-1}, x_i)$	$f(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$
0	0	0	------------	------------
1	1	1	1	------------
2	2	4	3	1

(מומלץ בטבלה לסדר את הערכים של x מהקטן (למעלה) לגדול (למטה))

המספרים המודגשים הם המקדמים שנציבם בנוסחה לקבלת הפולינום, ואכן -

$$P_2(x) = 0 + 1 * (x - 0) + 1 * (x - 0)(x - 1)$$

$$P_2(x) = x + x^2 - x = x^2$$

<u>דוגמה:</u>

מצא אינט' ניוטון עם הנקודות הבאות –

$$(0,0), (0.5, 4.25), (1,3), (2,2)$$

שוב , נבצע את החישובים לפי הנוסחאות הנ"ל –

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{4.25 - 0}{0.5 - 0} = 8.5$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 4.25}{1 - 0.5} = -2.5$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{-2.5 - 8.5}{1 - 0} = -11$$

$$f(x_2,x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{2-3}{2-1}=-1$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{1-(-2.5)}{2-0.5}=1$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}=\frac{1-(-11)}{2-0}=6$$

ואכן נכתוב בצורה של טבלה –

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_{i-1},x_i)$	$f(x_{i-2},x_{i-1},x_i)$	$f(x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i)$
0	0	0	-----------	-----------	-----------
1	0.5	4.25	8.5	-----------	-----------
2	1	3	-2.5	-11	-----------
3	2	2	-1	1	6

ולכן נקבל ש-

$$P_3(x)=0+8.5(x-0)-11(x-0)(x-0.5)+6(x-0)(x-0.5)(x-1)$$
$$=6x^3-20x^2+17x$$

<u>תרגיל:</u>

<u>סעיף א' –</u>

יהי - $P_3(x)$ פולינום אינטרפולציה דרך הנק':

$$(0,1),(2,7),(1,5),(3,y)$$

מצאו את y אם המקדם של x^3 הוא 1.

<u>פתרון:</u>

ואכן נבצע את החישובים (כאשר חלק מהתוצאות יהיו מבוטאות באמצעות y):

$$f(x_0,x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{5-1}{2-1}=4$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{7-5}{2-1}=2$$

$$f(x_0,x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)-f(x_0,x_1)}{x_2-x_0}=\frac{2-4}{2-0}=-1$$

$$f(x_2,x_3)=\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}=\frac{y-7}{3-2}=y-7$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_2,x_3)-f(x_1,x_2)}{x_3-x_1}=\frac{(y-7-2)}{3-1}=\frac{y-9}{2}$$

$$f(x_0,x_1,x_2,x_3)=\frac{f(x_1,x_2,x_3)-f(x_0,x_1,x_2)}{x_3-x_0}=\frac{\frac{y-9}{2}+1}{3-0}$$

ואכן נציג את הטבלה -

i	x_i	$f(x_i)$	$f(x_{i-1},x_i)$	$f(x_{i-2},x_{i-1},x_i)$	$f(x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_i)$
0	0	1	-----------	-----------	-----------
1	1	5	4	-----------	-----------
2	2	7	2	-1	-----------
3	3	y	$y-7$	$\frac{y-9}{2}$	$\frac{\frac{y-9}{2}+1}{3}$

אנו יודעים שהמקדם של x^3 הוא $\frac{\frac{y-9}{2}+1}{3}$ ולכן נשווה אותו ל-1 לפי הנתון ונמצא את y:

$$c_3=\frac{\frac{y-9}{2}+1}{3}=1 \quad => \quad y=13$$

■

סעיף ב' –

איך הפתרון היה משתנה אם המקדם של x היה שווה 1.

פתרון:

$$P_3(x)=1+4(x-0)-1(x-0)(x-1)+\left(\frac{\frac{y-9}{2}+1}{3}\right)(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$=1+4x-1(x^2-x)+\left(\frac{y-7}{6}\right)(x^3+3x^2+12x)$$

המקדם של x = $4+1+1*\frac{y-7}{6}$.

לכן –

$$-4=\frac{y-7}{3} => y=-5$$

■

<u>תרגול 10</u>

7 אוגוסט, 2016

<u>משפט השארית:</u>

תהא f גזירה ברציפות $n+1$ פעמים ותהי $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ קב' של נק' הדגימה. אזי , פולינום האינט' $P_N(x)$ מקיים $P_N(x_i) = f(x_i)$ מקרב את הפו' f עם <u>שגיאה</u>:

$$f(x) - P_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} * (x - x_0)(x - x_1) * \dots * (x - x_N)$$

כאשר - $c \in int(x_0, \dots, x_N)$ – הקטע הנפרש ע"י הנקודות $x_0, \dots, x_N$ (int – פנים).

$$|f(x) - P_N(x)| \le \frac{M_{N+1}}{(N+1)!} * |(x - x_0)(x - x_1) * \dots * (x - x_N)|$$

כאשר -

$$M_{N+1} = \max |f^{(N+1)}(c)|$$

<u>דוגמה:</u>

קרב את $f(x) = \sqrt{x}$ בנק' $x = 3$ בעזרת:

א) פולינום אינט' עם 2 נקודות $(1,1), (4,2)$.
ב) פולינום אינט' עם 3 נק' $(1,1), (4,2), (9,3)$.

השווה בין החסם לשגיאה בכל אחד מהמקרים ,לשגיאה המקורית כאשר $\sqrt{3} = 1.732$.

<u>פתרון:</u>

א) לא עשינו בכיתה.

ב) $P_2(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{3}{5}$

$$P_2(3) = 1.7$$

נחפש את השגיאה במקרה זה:

$$|f(x) - P_2(x)| \le \frac{M_3}{3} * |(x-1)(x-4)(x-9)|$$

כאשר -

$$M_3 = \max_{c \in [1,9]} f^{(3)}(c)$$

נגזור את $f(x)$ 3 פעמים ונחסום את הנגזרת לקבלת M.

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$
$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \le \frac{3}{8}$$

ולכן - $M_3 = \frac{3}{8}$ ומכאן החסם הינו -

$$|f(3) - P_2(3)| \le \frac{\frac{3}{8}}{6} * \left(2 * (-1) * (-6)\right) = \cdots = 0.75$$

כאשר הטעות בפועל –

$$e = \left|\text{אמיתי} - P_2(3)\right| = |\ 1.732 - 1.7| = 0.032$$