

תרגיל מספר 4:

הגשה תוך שבועיים בתרגול לידי המתרגל בלבד.

שאלה 1:

סטודנט עונה על שאלה במבחן אמריקאי שלה יש m אפשרויות נתונות לתשובה באופן הבא: בהסתברות p התלמיד למד את נושא השאלה ולכן יודע לבחור תשובה נכונה, אחרת הוא מנחש את התשובה.

- א. מהי ההסתברות שהסטודנט למד את נושא השאלה בהינתן שהוא ענה נכונה על השאלה?
- ב. נתחו את התוצאה עבור $m = 1$ ועבור $m \rightarrow \infty$.

שאלה 2:

ספק החולצות "ברארה" מקבל תוצרת מ-2 מפעלי טקסטיל. מפעל A מספר 40 אחוזים מהסחורה והיתר מסופק ע"י מפעל B. על סמך ניסיון העבר, ידוע שחמישית מהחולצות של מפעל A פגומות. במפעל B עובדים ב-2 משמרות מסביב לשעון. במשמרת היום, בה מיוצרות 70 אחוז מהחולצות, עשירית מהחולצות יוצאות פגומות, ואילו במשמרת הלילה 30 אחוז מהחולצות יוצאות פגומות.

- א. מהי ההסתברות לחולצה פגומה אצל "ברארה"?
- ב. מהי ההסתברות שחולצה שנמצאה פגומה ב "ברארה" יוצרה במפעל A?
- ג. מהי ההסתברות שחולצה שנמצאה פגומה ב "ברארה" יוצרה במפעל B במשמרת היום?
- ד. מהי ההסתברות שחולצה שנמצאה פגומה ב "ברארה" יוצרה במפעל B במשמרת הלילה?

שאלה 3:

טל וחיה משחקים בטורניר שחמט בו השחקן הראשון שמנצח משחק מנצח את הטורניר. אם ישנם 10 משחקים ברציפות שנגמרים בתיקו אז תוצאת הטורניר מוכרזת להיות תיקו. בכל משחק חיה מנצחת בסיכוי 0.4, טל מנצח בסיכוי 0.3, והמשחק מסתיים בתיקו בסיכוי 0.3, והמשחקים אינם תלויים זה בזה.

- א. מה הסיכוי שחיה תנצח בטורניר?
- ב. מהי התפלגות מספר המשחקים בטורניר?

שאלה 4:

תהי X_0, X_1, \dots, X_n סדרה של משתנים מקריים המוגדרים באופן הבא: $X_0 = 1$

ועבור $n = 1, 2, \dots$ המשתנים נתונים ע"י נוסחת הרקורסיה

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} & \text{בהסתברות } p \\ -X_{n-1} & \text{בהסתברות } 1-p \end{cases}$$

חשבו את פונקציית ההסתברות של X_n .

שאלה 5:

אדם אחד הטיל מטבע 10 פעמים עם הסתברות p להצלחה וקיבל X פעמים "ראש". אדם אחר הטיל אותה מטבע 5 פעמים וקיבל Y פעמים "ראש". נניח שידוע שכל 15 ההטלות הן ב"ת, חשבו $P(X = k | X + Y = 3)$ לכל הערכים k ש- X יכול לקבל.

(הערה: "ראש" ו-"זנב" שקול ל"פאלי" ו-"עץ".)

שאלה 6:

אלי מטיל מטבע n פעמים, ומקבל כפרס (תוכלו לקרא לו משתנה מקרי X) כל מטבע שיורה "ראש". אפרת לעומתו, מטילה את המטבע פעם אחת בלבד. והיה ויתקבל "ראש" הפרס שלה (תוכלו לקרא לו משתנה מקרי Y) יהיה מספר ה"ראשים" שהוציא אלי. אחרת, הפרס שלה יהיה כמספר ה"זנבות" שהוציא אלי.

- איך מתפלגים X ו- Y ? חשבו (בנוסף לכך) תוחלות ושונות.
- מצאו תוללת ושונות סך כל הפרסים, דהיינו $X+Y$ (הדרכה: הוכיחו כי השונות המשותפת $Cov(X, Y)$ שווה לאפס. ומשם הדרך קצרה מאוד מסעיף א).
- הראו, ש X ו- Y תלויים. (הדרכה: הראו שישנם ערכים אפשריים (בעלי הסתברות חיובית) של X ו- Y שעבורם ההתפלגות המשותפת של המשתנים מקבלת את הערך 0 והסיקו לגבי התלות).

שאלה 7:

באוסף מסיכות יש N מסכות. מהן יש D_i מסיכות מהסוג ה- i , כאשר $i = 1, \dots, k$ הוצאו והוחזרו לאוסף n מסיכות. סמנו ב X_i את מספר המסיכות מהסוג ה- i שהוצאו (והוחזרו).

- כיצד מתפלג X_i ?
- רשמו את פונקציית ההתפלגות המשותפת של X_1 ו- X_2 .
- האם המאורעות A – המסיכה החמישית שהוצאה היא מהסוג i ו- B – המסיכה העשירית שהוצאה הם מאורעות זרים? האם הם בלתי תלויים?
- כיצד מתפלגים $X_i + X_j$ ו- $X_i | (X_i + X_j = m)$ (משתנה מקרי מותנה)?

שאלה 8:

זוהי שאלת בונוס. בא לאמר: הפותרים נכונה שאלה זו יזכו לבונוס של 15 נקודות בציון התרגיל.

במגירה של n זוגות שונים של גרביים, שי, אינו מקפיד לסדר את גרביו, לכן הגרביים מפוזרות בתוך המגירה. היום בבוקר המגירה לא נפתחה במלואה לכן שי לא יכל לראות איזו גרב הוא מוציא מהמגירה. מאחר ושי ידוע כאדם עם הפרעות התנהגותיות קשות, החליט להוצים גרב גרב עד שיקבל לראשונה זוג. יתר על כן, מאחר ושי מתמטיקאי מתוסכל החליט לפני כן, לשבת ולחשב את פונקציית ההסתברות של מספר הגרביים שתוצאנה. אנא, עיזרו לשי במלאכתו זו, שלא יאחר לאוניברסיטה.