תרגיל 4

1. יהי X מ"מ ו$Y \subseteq X$ תת מרחב. ותהי $A \subseteq Y$. הוכיחו:
$cl_Y(A) = cl_X(A) \cap Y$.

2. הוכיחו: תהי A קבוצה במרחב מטרי. A סגורה אמ"ם $A' \subseteq A$.

3. תהי S קבוצה במרחב מטרי, ויהי $x \in S$. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:
א. $x \in S \setminus S'$.
ב. קיים $\epsilon > 0$ כך ש $B(x,\epsilon) \cap S = \{x\}$.
ג. לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq S$ כך ש $x_n \to x$, מתקיים ש$\{x_n\}$ קבועה לבסוף.

4. א. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$A \subseteq X$ תת מרחב. הוכיחו שאם A סגורה בX, אז A מרחב מטרי שלם.
ב. הראו שאם X אינו שלם, אז הטענה אינה בהכרח נכונה (כלומר, יתכן ש A סגורה בX, אבל A לא מרחב שלם).
ג. יהי X מרחב מטרי כלשהו, ו$A \subseteq X$ תת מרחב מטרי שלם. הוכיחו שA סגורה בX.
ד. יהי X מרחב מטרי שלם, ו$f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו/הפריכו: $f[X]$ תת מרחב שלם של $\mathbb{R}$.

5. חשבו את הסגור של הקבוצות הבאות:
א. במרחב המטרי X של אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{0,1,2...,n\}$, עם המטריקה הבאה $d : X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}.$$

מצאו את הסגור של הקבוצה A= אוסף הסדרות המתאפסות לבסוף.
ב. ב $(\mathbb{Z}, d_3)$ מצאו את הסגור של הקבוצה $A = 5\mathbb{Z}$.
ג. ב $C[0,1]$ עם מטריקת המקסימום, מצאו את הסגור של הקבוצה $A = \{f : f(\frac{1}{2}) < .5\}$

6. הוכיחו/הפריכו:
א. $A'_1 \cup ... \cup A'_n = (A_1 \cup ... \cup A_n)'$.
ב. $\bigcup A'_i = (\bigcup A_i)'$.