

תרגיל 3

20 במרץ 2018

1. באיזה תחום מתקיים משפט הקיום והיחידות עבור המד"רים הבאים:

$$y' = \sqrt{y-x} \quad (\text{א})$$

פתרון:

נסמן $f(x, y) = \sqrt{x-y}$. תחום ההגדרה הוא כל הנקודות בהן $x \geq y$.

$$f_y = \frac{-1}{2\sqrt{y-x}}$$

לכן משפט הקיום והיחידות מתקיים בכל הנקודות בהן $x > y$.

$$y' = \ln(-x^2 + y) \quad (\text{ב})$$

פתרון:

מוגדר כאשר $y > x^2$. $f(x, y) = \ln(-x^2 + y)$

$$f_y = \frac{1}{-x^2 + y}$$

לכן סה"כ משפט הקיום והיחידות מתקיים בכל הנקודות (x, y) בהן $y > x^2$.

2. הוכיחו שלא קיימת פונקציה $f(x, y)$ רציפה וגזירה ברציפות בתחום: $D = \{(x, y) : x \neq y, \text{ כד שהפונקציות } y_1(x) = 3x \text{ ו } y_2 = x^2 + 2 \text{ הן פתרונות של המד"ר}\}$

$$y' = f(x, y)$$

פתרון:

ניתן לראות ש y_1 ו y_2 נחתכות בנקודה $(1, 3)$. הנקודה הזאת נמצאת בתחום בו מתקיים משפט הקיום והיחידות, ולכן יש רק פתרון אחד שעובר דרכה. לכן לא ייתכן שגם y_1 וגם y_2 יהיו פתרונות של המד"ר.

3. תהי $a(x)$ פונקציה רציפה על כל \mathbb{R} . הוכיחו שכל פתרון של המד"ר $y' + a(x)y = 0$

שהוא לא פונקציה קבועה על 0, לא חותך את ציר ה- x .

פתרון:

מכיוון ש $a(x)$ רציפה על כל \mathbb{R} , משפט הקיום והיחידות מתקיים בכל נקודה במישור. ראינו בהרצאה שהפונקציה הקבועה $y_1(x) = 0$ היא פתרון של המד"ר.

יהי $y_2(x)$ פתרון נוסף. נניח שהיא חותכת את ציר ה- x . כלומר, יש נקודה x_0 כך ש $y_2(x_0) = 0$. אבל $y_2(x_0) = 0$. קיבלנו שדרך הנקודה $(x_0, 0)$ עוברים שני פתרונות שונים. סתירה.

4. מצאו את כל הפתרונות של בעיית ההתחלה

$$\begin{cases} y' \left(\frac{x^2 + e^y}{\sin y} \right) + y = 1 \\ y(2) = 1 \end{cases}$$

(רמז: נסו פונקציה קבועה)
פתרון:

ראשית, נסדר את הפונקציה.

$$y' = \frac{(1-y)\sin y}{x^2 + e^y}$$

הפונקציה $f(x, y) = \frac{(1-y)\sin y}{x^2 + e^y}$ רציפה בכל המישור.

$$f_y = \frac{(-\sin y - y \cos y)(x^2 + e^y) - e^y(1-y)\sin y}{(x^2 + e^y)^2}$$

גם f_y רציפה בכל המישור.

לכן בכל נקודה מתקיים משפט הקיום והיחידות. בפרט בנקודה $(2, 1)$. מספיק למצוא פתרון אחד שעובר בנקודה הזו. ננסה את הפונקציה $y(x) = 1$.

אכן, $y' = 0$ ואם נציב במשוואה נקבל שוויון לכל x . כמו כן, ברור שהפונקציה עוברת בנקודה $(2, 1)$. לכן כל הפתרונות של בעיית ההתחלה הם רק הפונקציה הקבועה $y(x) = 1$.