תרגיל 4 מבוא לתורת החבורות

שאלה 4.1 קודם כל נזכיר: עבור $a, b \in \mathbb{Z}$ מספרים שלמים, הכופל המשותף המזערי שלהם - $m = \operatorname{lcm}(a, b)$ - הוא המספר הכי קטן שמקיים $m \mid a$ ו $m \mid b$. אפשר להוכיח שאם יש מספר אחר x כך ש $x \mid a$ ו $x \mid b$ אזי $x \mid m$. כמו כן, ידוע כי

$$\operatorname{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)}$$

1. תהינה G, H חבורות שבהן לכל איבר יש סדר סופי. ניקח $g \in G$ ו $h \in H$. הוכיחו כי הסדר של (g, h) בחבורה $G \times H$ הוא

$$\operatorname{lcm}(\mathrm{o}(g), \mathrm{o}(h))$$

2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ היא חבורה ציקלית אם ורק אם n ו m זרים.

שאלה 4.2 תהי $G = \langle g \rangle$ חבורה ציקלית ו $H \leq G$ תת חבורה. הוכיחו כי גם H חבורה ציקלית.

הדרכה: קחו את ה k המינימלי עבורו $g^k \in H$. הוכיחו כי $H = \langle g^k \rangle$.

שאלה 4.3 בכל אחד מהמקרים הבאים. תארו את הקוסטים של תת החבורה H בחבורה G (לא משנה אם קוסטים ימניים או שמאליים, אין הבדל בדוגמאות כאן):

1. $G = U_{30}$ ו $H = \langle 11 \rangle$.
2. $G = (\mathbb{C} \backslash \{0\}, \cdot)$ ו $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
3. עבור A, B חבורות כלשהן. $G = A \times B$ ו $H = A \times \{e\}$.
4. $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ו $H = \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid |A| = 1\}$

שאלה 4.4 תהי G חבורה סופית ויהיו H, K שתי תתי חבורות כך ש

$$\gcd(|H|, |K|) = 1$$

הוכיחו כי $H \cap K = \{e\}$.

שאלה 4.5 יהיו p, q ראשוניים שונים. תהי G חבורה מסדר pq. הוכיחו כי כל תת חבורה ממש של G (כלומר, תת חבורה $H \leq G$ כך ש $H \neq G$) היא ציקלית.

שאלה 4.6 לכל חבורה G יש לפחות 2 תתי חבורות "טריויאליות": G ו $\{e\}$. מצאו את כל החבורות G (סופיות או אינסופיות) שאלה תתי החבורות היחידות שלהן. במילים אחרות מצאו את כל החבורות שאין להם תתי חבורות לא טריויאליות.
הערה: הכוונה שלי היא להגיע לתשובה בסגנון הזה: "אלה בדיוק החבורות האבליות מסדר 15 ו 7" (הכוונה היא לא לתאר במפורט את החבורה והכפל שלה)