# מבנים אלגברים תשעה- תרגיל 1

1. סגירות: $X \ni \begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

אסוצ': כפל מטריצות הוא אסוצ'.

מטריצת היחידה $I_2$ לא שייכת ל- $X$ לכן אין יחידה (צריך גם להשתכנע שאין יחידה אחרת).

2.

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \quad a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

לגבי חיבור: אין סגירות לחיבור כי למשל $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin A$

לגבי כפל: יש סגירות (שימו לב שהתנאי $a^2 + b^2 > 0$ הוא בסכה"כ שהדטרמיננטה היא לא אפס (כי ברור ש $a^2 + b^2 \geq 0$), ואנחנו יודעים שמכפלה של מטריצות הפיכות היא הפיכה. גם אם לא שמתם לב לזה- זה חישוב לא מדי מסובך). אסוציאטיביות ידועה (כמו כפל רגיל של מטריצות). היחידה היא $I_2 \in A$. ויש הופכי לכל מטריצה $A \ni \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^{-1}$.

ולכן זו **חבורה**.

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : \quad ac \neq 0 \right\}$$

לגבי חיבור: שוב אין סגירות. שכן $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin B$

לגבי כפל: יש סגירות (שוב, שימו לב שהתנאי הוא שהדטרמיננטה היא לא אפס). אסוציאטיביות ידועה. היחידה היא מטריצת היחידה. ההופכי: $A \ni \frac{1}{ac}\begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{-1}$.

ולכן זו **חבורה**.

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

לגבי חיבור: אין סגירות $C \notin \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

לגבי כפל: יש סגירות (כמו קודם). אסוציאטיביות ידועה. היחידה היא מטריצת היחידה. יש סגירות להופכי שכן $C \ni \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

ולכן זו **חבורה**.

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : xy \neq 0 \right\}$$

לגבי חיבור: אין סגירות למשל: $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & 0 \\ 0 & -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin D$.

לגבי כפל: יש סגירות (כנ"ל). אסוציאטיביות ידועה. היחידה היא מטריצת היחידה. יש סגירות להופכי. ולכן זו **חבורה**.

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} : \quad axz \neq 0 \right\}$$

שימו לב שאלו בדיוק המטריצות המשולשיות עליונות ההפיכות.

לגבי חיבור: אין סגירות.

לגבי כפל: יש סגירות (ידוע שמכפלה של משולשיות עליוניות היא משולשית עליונה, וידוע שמכפלה של הפיכות היא הפיכה). אסוציאטיביות ידועה. היחידה היא מטריצת היחידה $I_3$. ויש סגירות להופכי (גם ידוע על מטריצות משולשיות עליוניות).

ולכן זו **חבורה**.

$$F := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \right\}$$

לגבי חיבור: יש סגירות (ידוע על משולשיות עליוניות). אסוציאטיביות ידועה. היחידה ביחס לחיבור זה מטריצת האפס. ההופכי ביחס לחיבור זה המטריצה הנגדית $\begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ 0 & -x & -y \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix}$. ולכן זו **חבורה**.

לגבי כפל: יש סגירות (ידוע על משולשיות עליוניות). אסוציאטיביות ידועה. היחידה היא מטריצת היחידה. אבל אין לכל איבר הופכי: למשל מטריצת האפס נמצאת שם וברור שאין לה הופכי כפלי. ולכן זה **מונואיד**.

3. תהי $G$ חבורה . הוכח:

א. אם $a^2 = e$ אז נכפול בהופכי של $a$ את שני האגפים.
אם $a = a^{-1}$ אז לפי ההגדרה של הופכי $e = aa^{-1} = aa = a^2$

ב. נקח $a, b \in G$ (ונרצה להראות ש $ab = ba$). לפי הנתונים $e = a^2 = b^2 = (ab)^2$.

נפתח את זה ונקבל: $aabb = a^2b^2 = ee = e = abab = (ab)^2$. נכפול מימין ב $b^{-1}$

ומשמאל ב$a^{-1}$ ונקבל את הדרוש.

ג. $(a^{-1}ba)^k = (a^{-1}ba)(a^{-1}ba) \dots (a^{-1}ba)$. נצמצם אם כל ה $a, a^{-1}$ הסמוכים ונקבל בדיוק $a^{-1}b^k a$.

ד. אם $G$ אבלית אז ברור ש- $(ab)^2 = a^2b^2$.

אם לכל שני איברים מתקיים $(ab)^2 = abab = a^2b^2 = aabb$ אז

ע"י צמצום נקבל $ba = ab$ מב שאומר שזו חבורה אבלית.

4. חשבו את $d = \gcd(a,b)$ ומצאו $t,k \in \mathbb{Z}$ כך ש- $d = ta + kb$, עבור המספרים הבאים:

א. $a = 51, b = 85$.

$$85 = 51 \cdot 1 + 34$$

$$51 = 34 \cdot 1 + 17$$

$$34 = 17 \cdot 2 + 0$$

ולכן ה *gcd* הוא 17. כעת נציב לאחור:

$$17 = 51 - 34 = 51 - (85 - 51) = 2 \cdot 51 + (-1) \cdot 85$$

ב. $a = 1302, b = 56$

$$1302 = 56 \cdot 23 + 14$$

$$56 = 14 \cdot 4 + 0$$

ולכן ה*gcd* הוא 14. נציב לאחור: $14 = 1302 - 23 \cdot 56$.

5. האם 23 הפיך ב $\mathbb{Z}_{52}$? אם כן,מיהו ההופכי שלו?

נבדוק את ה*gcd* של 23 ו 52:

$$52 = 23 \cdot 2 + 6$$

$$23 = 6 \cdot 3 + 5$$

$$6 = 5 \cdot 1 + 1$$

$$5 = 1 \cdot 5 + 0$$

ה*gcd* הוא 1 ולכן 23 הפיך. נציב לאחור ונקבל: $1 = 23 * 9 - 52 * 4$ ולכן ההופכי זה $-9$.

6. פתור את המשוואות הבאות:

א. קל לראות ש$-1 = 11$ ב$\mathbb{Z}_6$ ולכן הפתרון הוא $x = -3 = 3$

ב.כבר מצאנו את ההופכי של 23 ב $\mathbb{Z}_{52}$ בשאלה הקודמת.