<u>תזכורת:</u>

פעולות על קבוצות שכבר ראינו:

1. חיתוך: $x\in A\wedge x\in B\iff x\in A\cap B$.
2. איחוד: $x\in A\vee x\in B\iff x\in A\cup B$.
3. הפרש: $x\in A\wedge x\notin B\iff x\in A\backslash B$.
4. הפרש סימטרי: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
5. משלים: $x\notin A\iff x\in A^{c}$.

כמו כן, הכללנו את פעולות האיחוד והחיתוך לאוסף כלשהו של קבוצות:

$$x\in\bigcap_{i\in I}A_{i}\iff\forall i\in I\,:\,x\in A_{i}$$

$$x\in\bigcup_{i\in I}A_{i}\iff\exists i\in I\,:\,x\in A_{i}$$

<u>קבוצת החזקה:</u>

קבוצת החזקה של קבוצה A מסומנת $P\left(A\right)$; זו קבוצת כל תתי־הקבוצות של A:

$$P\left(A\right)=\left\{ B|B\subseteq A\right\}$$

למשל:

$$A=\left\{ 1,2\right\}$$

$$P\left(A\right)=\left\{ \emptyset,\left\{ 1\right\} ,\left\{ 2\right\} ,\left\{ 1,2\right\} \right\}$$

באופן דומה:

$$A=\left\{ 1,2,3\right\}$$

$$P(A)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$$

<u>הערות:</u>

1. נדגיש: $x\subseteq A \iff x\in P(A)$.
2. לכל A מתקיים: $\emptyset\subseteq A$, ולכן: $\emptyset\in P(A)$. בפרט, בקבוצת החזקה תמיד יש איבר ולכן: $P(A)\neq\emptyset$.
3. אם $A\subseteq B$ אז: $P(A)\subseteq P(B)$. אפשר לשאול האם קבוצת החזקה שומרת על פעולות בין קבוצות, כלומר האם:

$$P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$$

$$P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$$

הטענה הראשונה נכונה, הטענה השניה לא - נפריך ע"י דוגמה נגדית: $A=\{1\},B=\{2\}$. מצד אחד:

$$P(A)=\{\emptyset,\{1\}\},\ P(B)=\{\emptyset,\{2\}\}\Longrightarrow P(A)\cup P(B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\}\}$$

מצד שני:

$$A\cup B=\{1,2\}\Longrightarrow P(A\cup B)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$$

ואכן: $P(A\cup B)\neq P(A)\cup P(B)$. נשים לב שמתקיים: $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$; זה נכון תמיד.

4. אפשר לדבר על קבוצת חזקה גם של קבוצה אינסופית, למשל $P(P(\mathbb{R}))$.

כמו כן, אפשר לדבר על קבוצת החזקה של קבוצת החזקה של קבוצת החזקה....למשל:

$$A=\{1\},\ P(A)=\{\emptyset,\{1\}\}\Longrightarrow P(P(A))=\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{1\}\},\{\emptyset,\{1\}\}\}$$

5. כמה איברים יש בקבוצת החזקה? את מספר האיברים בקבוצה נסמן: $|A|$. למשל: $|\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\emptyset, \{1\}\}\}| = 4$. מספר האיברים בקבוצה נקרא העוצמה של הקבוצה. נתמקד כרגע במקרה הסופי (קבוצה סופית).
נשים לב, בדוגמאות שלנו:

$$P(\{1\}) = \{\emptyset, \{1\}\}$$

$$P(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

$$P(\{1,2,3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

מה קרה במעבר מ־$\{1\}$ל־$\{1,2\}$? הקבוצות $\emptyset, \{1\}$ "התפצלו לשניים" – אותן הקבוצות (לא הוספנו להן את האיבר החדש, 2) והקבוצות אחרי שהוספנו להן את האיבר החדש. כך גם במעבר מ־$\{1,2\}$ ל־$\{1,2,3\}$ – הקבוצות "התפצלו לשניים" – אותן הקבוצות והקבוצות אחרי שהוספנו להן את האיבר החדש, 3.

אם כן, בכל פעם שמוסיפים איבר לקבוצה המקורית, מספר האיברים בקבוצת החזקה גדל פי 2.

<u>משפט:</u>

אם $|A| = n$ אז $|P(A)| = 2^n$ (לקבוצה עם n איברים יש 2^n תתי־קבוצות).

<u>הוכחה:</u>

ראשית, עבור $n = 0$: $A = \emptyset$ ואכן: $P(A) = \{\emptyset\}$, ו: $|P(A)| = 1 = 2^0$.

שנית, נניח שהטענה נכונה עבור $n = k$, כלומר אם ב־A יש k איברים אז יש ל־A 2^k תתי־קבוצות.

באמצעות ההנחה, נוכיח שהטענה נכונה עבור $n = k + 1$ – צ"ל: אם ב־A

יש $k+1$ איברים, יש לה 2^{k+1} תתי־קבוצות.

אם כן, נסמן: $A=\{a_1,\ldots,a_k,a_{k+1}\}$. אפשר לרשום: $A=\{a_1,\ldots,a_k\}\cup\{a_{k+1}\}$. תתי־הקבוצות של A מתחלקות לשני סוגים:

א. תתי־קבוצות של $\{a_1,\ldots,a_k\}$ – לפי ההנחה, יש 2^k כאלו.

ב. תתי־קבוצות של $\{a_1,\ldots,a_k\}$ שהוספנו להן את a_{k+1}; איך נראית קבוצה? $B\cup\{a_{k+1}\}$ כאשר $B\subseteq\{a_1,\ldots,a_k\}$. אנחנו סופרים בפועל את הקבוצות B; כל תת־קבוצה של $\{a_1,\ldots,a_k\}$ שהוספנו להן את a_{k+1} מתאימה לקבוצה B כזו. שוב, לפי ההנחה, יש 2^k כאלו (מספרן שווה למספר הקבוצות ה"מקוריות").

סה"כ:

$$|P(A)|=2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}$$

כנדרש.

<u>מכפלה קרטזית:</u>

בקבוצות אין חשיבות לסדר, למשל: $\{1,2\}=\{2,1\}$. אנחנו רוצים להגדיר "יצור" שבו כן יש חשיבות לסדר. האמת היא שאנחנו כבר מכירים יצורים כאלו – נקודות במישור. הנקודה $(1,2)$ שונה מהנקודה $(2,1)$.

אנחנו נקרא ל־(a,b) זוג סדור. השאלה היא האם אפשר להגדיר זוג סדור באמצעות קבוצות? להגדיר קבוצה באמצעות a,b שבה כן יש חשיבות לסדר... מה היא בכלל חשיבות לסדר? אפשר לומר, שאם: $(a,b)=(c,d)$, אז $a=c\wedge b=d$.

אם כן, נגדיר את הזוג הסדור (a,b) באמצעות קבוצות באופן הבא:

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}$$

נראה שההגדרה אכן מקיימת את מה שאנחנו רוצים שהיא תקיים: אם: $(a,b)=(c,d)$, אז $a=c\wedge b=d$.

אם $(a,b)=(c,d)$, לפי ההגדרה:

$$\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{c\},\{c,d\}\}$$

יש לנו שני מקרים:

א. $\{a\}=\{c\}$ וגם $\{a,b\}=\{c,d\}$. מכיוון ש: $\{a\}=\{c\}$ נקבל ש: $a=c$. כעת, מהנתון: $\{a,b\}=\{c,d\}$ נקבל: $\{c,b\}=\{c,d\}$. שוב, יש לנו שני מקרים: $c=c\wedge b=d$ או $c=d\wedge b=c$. בכל מקרה, $b=d$, סה"כ: $a=c\wedge b=d$, כנדרש.

ב. $\{a\}=\{c,d\}$ וגם $\{a,b\}=\{c\}$. בקבוצה $\{a\}$ יש איבר אחד, ולכן גם בקבוצה $\{c,d\}$ יש איבר אחד (הן שוות). לכן, $c=d$. לכן, אפשר לרשום: $\{a\}=\{c,d\}=\{c\}$ ולכן: $a=c$. באופן דומה, מהנתון $\{a,b\}=\{c\}$ אפשר להסיק ש: $a=b=c$, וסה"כ: $a=b=c=d$ ובפרט: $a=c\wedge b=d$, כנדרש.

סה"כ, הראנו שבכל מקרה מתקיים: $a=c\wedge b=d$.

מעתה והלאה נשכח מההגדרה הזו, ונתייחס אל הזוג הסדור כאל יצור בפני עצמו.

המכפלה הקרטזית של שתי קבוצות A,B מסומנת: $A\times B$, זו קבוצת כל הזוגות הסדורים שהרכיב השמאלי שלהם שייך ל־A והרכיב הימני שייך ל־B:

$$A\times B=\{(a,b)\,|a\in A\wedge b\in B\}$$

למשל:

$$A = \{1,2\}\,, B = \{1,2,3\}$$

$$A \times B = \{(1,1)\,,(1,2)\,,(1,3)\,,(2,1)\,,(2,2)\,,(2,3)\}$$

$$B \times A = \{(1,1)\,,(1,2)\,,(2,1)\,,(2,2)\,,(3,1)\,,(3,2)\}$$

נשים לב: $A \times B \neq B \times A$ בדוגמה שלנו.

<u>תכונות:</u>

1. $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.
2. $A \times B = B \times A$ אם ורק אם $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$. במילים אחרות, אם A, B לא ריקות ושונות אז: $A \times B \neq B \times A$.
3. אפשר לשאול איך מכפלה קרטזית מתנהגת ביחס לשאר הפעולות; למשל, האם:

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B)$$

4. נדגיש: $(a,b) \in A \times B \iff a \in A \wedge b \in B$.
5. למה קרטזית? נשים לב שהמכפלה: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ היא בעצם המישור (נקודות עם שני רכיבים ממשיים). את התחלת השימוש בגיאומטריה באנליטית מקובל ליחס לרנה דקארט.

<u>הערות:</u>

1. אפשר להכפיל קרטזית כל קבוצה עם כל קבוצה, למשל: $P(\mathbb{N})\times\mathbb{R}=$ $\{(A,b)\,|A\in P(\mathbb{N}),b\in\mathbb{R}\}$.
2. אפשר להכפיל יותר משתי קבוצות, למשל:

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b,c)\,|a,b,c\in\mathbb{R}\}$$

זה המרחב; (a,b,c) נקרא שלשה סדורה/שלישיה סדורה. באופן כללי:

$$A_1\times\ldots\times A_n=\{(a_1,\ldots,a_n)\,|a_i\in A_i\}$$

$(a_1,\ldots a_n)$ נקרא n־יה סדורה.

<u>יחסים:</u>

תהיינה A,B קבוצות. תת־קבוצה $R\subseteq A\times B$ נקראת יחס מ־A ל־B.
תת־קבוצה $R\subseteq A\times A$ נקראת יחס על A. למשל:

$$A=\{1,2,3\}$$

תתי־הקבוצות של $A\times A$ כולן יחסים על A, למשל: $R=\{(1,1),(2,3),(1,2)\},S=$ $\{(3,3)\}\subseteq A\times A$...

נשים לב ש: $\emptyset, A\times A$ הן תמיד יחסים על A; $\emptyset$ נקראת היחס הריק, $A\times A$ נקראת היחס המלא.

דוגמאות נוספות ליחסים:

1. A היא קבוצת כל הסטודנטים, R הוא קבוצת כל הזוגות הסדורים (a,b) כך ש:a חבר של b.
2. $P(\mathbb{N})\times\mathbb{N}$, נגדיר יחס $R\subseteq P(\mathbb{N})\times\mathbb{N}$ כך:

$$R=\{(A,a)\,|a\in A\}$$

מתי קבוצה ואיבר נמצאים ביחד בזוג ביחס? כשהאיבר שייך לקבוצה. למשל, $1 \in \{1,2,3\}$ ולכן: $(\{1,2,3\},1) \in R$.

לעומת זאת, $10 \notin \mathbb{N} \setminus \{10\}$ ולכן: $(\mathbb{N} \setminus \{10\},10) \notin R$.

<u>הערות:</u>

1. אם $(a,b) \in R$, אפשר לומר ש־a מתייחס ל־b ואפשר לסמן: aRb.
2. לכל יחס $R \subseteq A \times B$ אפשר להגדיר את היחס ההפוך: $R^{-1} \subseteq B \times A$, המתקבל מ־$R$ ע"י הפיכת הסדר בכל הזוגות:

$$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$$

למשל:

$$R = \{(1,1),(2,3),(1,2)\} \Longrightarrow R^{-1} = \{(1,1),(3,2),(2,1)\}$$

כמובן, עכשיו אפשר לשאול איך הפעולה של היפוך היחס מתנהגת ביחס לפעולות האחרות, למשל האם:

$$(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$$

<u>תכונות של יחסים:</u>

נתמקד רק ביחסים על קבוצה A (תתי־קבוצות של $A \times A$).

תהי A קבוצה ו־R יחס על A.

1. רפלקסיביות: R נקרא רפלקסיבי, אם לכל $a \in A$ מתקיים: $(a,a) \in R$.

במילים: כל איבר נמצא עם עצמו בזוג. למשל:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3)\}, S = \{(1,1),(1,2),(3,2)\}$$

R רפלקסיבי; S לא רפלקסיבי; למשל, $2 \in A$ אך $(2,2) \notin S$.

דוגמה נוספת:

$$C = P(\mathbb{R})$$

$$R = \{(A,B) \,| A \subseteq B\} \subseteq P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R})$$

(שתי קבוצות נמצאות ביחד בזוג אם השמאלית מוכלת בימנית; למשל: $\{1\} \subseteq \mathbb{Z}$ ולכן: $(\{1\}, \mathbb{Z}) \in R$. מצד שני, $\{\sqrt{2}\} \nsubseteq \{1,2,5,6\}$ ולכן: $(\{\sqrt{2}\}, \{1,2,5,6\}) \notin R$). כעת, לכל $A \in P(\mathbb{R})$, $A \subseteq A$ ולכן – לפי הגדרת היחס R – $(A,A) \in R$ ולכן R רפלקסיבי.

2. אנטי־רפלקסיביות: R נקרא אנטי־רפלקסיבי, אם לכל $a \in A$ מתקיים: $(a,a) \notin R$. במילים: אין איבר שנמצא עם עצמו בזוג. למשל:

$$A = \{1,2,3\}, R = \{(3,1), (1,2)\}, S = \{(1,1), (1,2), (3,2)\}$$

R אנטי־רפלקסיבי; S לא אנטי־רפלקסיבי, כי $(1,1) \in S$.

3. סימטריות: R נקרא סימטרי, אם לכל $a,b \in A$ מתקיים: $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$. במילים: אם זוג נמצא ביחס, אז גם הזוג "ההפוך" נמצא ביחס. למשל:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$R = \{(1,1), (1,2), (3,3), (2,1)\}, S = \{(2,2), (1,3), (3,1), (2,1)\}$$

R סימטרי; S לא סימטרי: $S \in (2,1)$ אך $S \notin (1,2)$.

היחס $R = \{(A,B)\,|A \subseteq B\} \subseteq P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R})$ מהדוגמה הקודמת הוא לא סימטרי, למשל $R \in (\{1\},\mathbb{Z})$ כי $\{1\} \subseteq \mathbb{Z}$, אך $(\mathbb{Z},\{1\}) \notin R$ (כי: $\mathbb{Z} \nsubseteq \{1\}$).

דוגמה נוספת: A קבוצת האנשים בישראל, $(a,b) \in R$ אם ורק אם a אח של b. זהו יחס סימטרי – אם a אח של b אז b אח של a.

4. אנטי־סימטריות: R נקרא אנטי־סימטרי, אם לכל $a,b \in A$ מתקיים: $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \to a = b$. במילים: אם גם זוג וגם ההפוך שלו נמצאים ביחס, אז זה אותו זוג – זה זוג שהאיברים שלו שווים. במילים אחרות, מתי R הוא **לא** אנטי־סימטרי? R **לא** אנטי־סימטרי אם קיימים שנים זוגות הפוכים זה לזה ב־R ושונים זה מזה; מתמטית: $(a,b),(b,a) \in R \wedge a \neq b$.

למשל:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(3,3)\}$$

$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

$$R_3 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,2)\}$$

$$R_4 = \{(2,2),(3,3)\}$$

R_1 לא סימטרי, למשל $(1,2) \in R_1$ אך $(2,1) \notin R_1$. R_1 אנטי־סימטרי.

R_2 סימטרי. R_2 לא אנטי־סימטרי, $(2,1),(1,2) \in R_2$ אך $2 \neq 1$.

R_3 לא סימטרי, $(3,2) \in R_3$ אך $(2,3) \notin R_3$. מצד שני, R_3 גם לא אנטי־סימטרי, $(2,1),(1,2) \in R_3$ אך $2 \neq 1$.

R_4 סימטרי. R_4 גם אנטי־סימטרי.

דוגמה נוספת: $R = \{(A,B) | A \subseteq B\} \subseteq P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R})$. האם R אנטי־סימטרי? השאלה היא כזו: אם $(A,B),(B,A) \in R$ אז $A = B$?
אם כן, אם $(A,B) \in R$ אז $A \subseteq B$ ואם $(B,A) \in R$ אז $B \subseteq A$ (לפי הגדרת היחס), ובסה"כ: $A = B$, לפי הכלה דו־כיוונית, כנדרש. לכן, R אכן אנטי־סימטרי.

5. טרנזיטיביות: R נקרא טרנזיטיבי, אם לכל $a,b,c \in A$, מתקיים: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \to (a,c) \in R$ (כלל המעבר). במילים אחרות, R **לא** טרנזיטיבי אם קיימים $(a,b),(b,c) \in R$ כך ש: $(a,c) \notin R$. למשל:

$$A = \{1,2,3\}$$

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}, S = \{(1,2),(2,1),(1,1)\}, T = \{(1,3)\}$$

R טרנזיטיבי (למשל: $(2,1),(1,2) \in R$ ואכן גם $(1,1) \in R$; כמו כן, $(1,2),(2,1) \in R$ ואכן גם $(2,2) \in R$, וכן הלאה).

S לא טרנזיטיבי, $(1,2),(2,1) \in S$ אך: $(2,2) \notin S$. T טרנזיטיבי.

דוגמה נוספת: $R = \{(A,B) | A \subseteq B\} \subseteq P(\mathbb{R}) \times P(\mathbb{R})$. האם R טרנזיטיבי? השאלה היא כזו: אם $(A,B),(B,C) \in R$, האם בהכרח $(A,C) \in R$? לפי הגדרת היחס, השאלה היא: אם $A \subseteq B, B \subseteq C$, האם

בהכרח: $C \subseteq A$? התשובה היא כן, ולכן R טרנזיטיבי.

<u>יחס שקילות:</u>

יחס R על קבוצה A נקרא יחס שקילות, אם הוא רפלקסיבי וגם סימטרי וגם טרנזיטיבי. למשל:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\ (1,3), (3,1)\}$$

R יחס שקילות.

כאשר R יחס שקילות, אפשר להגדיר לכל איבר את מחלקת השקילות שלו – קבוצת כל האיברים שנמצאים איתו ביחד ביחס:

$$[a]_R = \{b \in A|\ (a,b) \in R\}$$

למשל, בדוגמה שלנו:

$$[1]_R = \{1,3\}, [2]_R = \{2\}, [3]_R = \{3,1\}, [4]_R = \{4\}$$

קבוצת כל מחלקות השקילות נקראת קבוצת המנה, ומסומנת A/R. אצלנו בדוגמה:

$$A/R = \{\{1,3\}, \{2\}, \{4\}\}$$