טופולוגיה אלגברית 1 - תרגיל בית 7

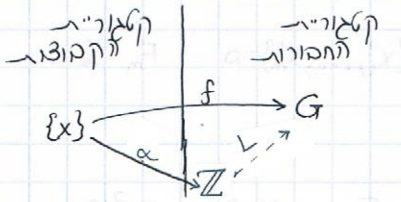
שאלה 1

מהי החבורה F_1?

פתרון:

נוכיח כי $F_1 \cong \mathbb{Z}$.

נראה ש-$\mathbb{Z}$ מקיימת את התכונה האוניברסלית של F_1.



תהי $\{x\}$ קבוצה בת איבר אחד.

נגדיר $\alpha:\{x\}\longrightarrow\mathbb{Z}$ ע"י $\alpha(x)=1$.

תהי G חבורה, ותהי $f:\{x\}\longrightarrow G$ פונקציה.

נגדיר $L:\mathbb{Z}\longrightarrow G$ ע"י $L(n):=(f(x))^n$.

נוכיח ש-L הומומורפיזם: $L(m+n)=(f(x))^{m+n}=(f(x))^m(f(x))^n=L(m)\cdot L(n)$.

כמו כן, $(L\circ\alpha)(x)=L(\alpha(x))=L(1)=f(x) \Leftarrow L\circ\alpha=f$.

נניח כי $L':\mathbb{Z}\longrightarrow G$ הומומורפיזם אחר שעבורו $L'\circ\alpha=f$. בהכרח

$$L'(1)=L'(\alpha(x))=f(x)$$

לכל $n\in\mathbb{Z}$, $L'(n)=L'(\underbrace{n\cdot 1}_{\text{כפולה}})=(L'(1))^n=(f(x))^n=L(n)$

ולכן L יחיד.

בסך הכל, $\mathbb{Z}$ מקיימת את התכונה האוניברסלית של F_1, ולכן $F_1\cong\mathbb{Z}$.

שאלה 2

הראה ש- $F_n * F_m \cong F_{n+m}$.

<u>הוכחה:</u>

נראה ש- F_{n+m} מקיימת את התכונה האוניברסלית של $F_n * F_m$.

$$\begin{tikzcd}
F_n \arrow[dr, "i"] \arrow[rr, bend left, "g"] & & \\
& F_{n+m} \arrow[r, dashed, "L"] & G \\
F_m \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right, "h"] & &
\end{tikzcd}$$

לצורך הפשטות, נסמן את היוצרים
של F_n ב- $\{x'_1,\dots,x'_n\}$ ואת היוצרים
של F_m ב- $\{x''_1,\dots,x''_m\}$.

רוצים להגדיר $i: F_n \longrightarrow F_{n+m}$ ו- $j: F_m \longrightarrow F_{n+m}$; לפי התכונה האוניברסלית של F_n ושל F_m, מספיק להגדיר על קבוצת היוצרים.

נגדיר $i(x'_k) = x_k$ ו- $j(x''_k) = x_{n+k}$. לכן קיימים הומומורפיזמים יחידים i ו- j כנ"ל. נראה כי הם הדרושים.

תהי G חבורה, ויהיו $g: F_n \to G$, $h: F_m \to G$ הומומורפיזמים.

מחפשים הומומורפיזם $L: F_{n+m} \longrightarrow G$. לפי התכונה האוניברסלית של החבורה החופשית, מספיק להגדיר את L על קבוצת היוצרים.

לכן, קיים הומומורפיזם יחיד $L: F_{n+m} \longrightarrow G$ המקיים $L(x_k) = \begin{cases} g(x'_k), & 1 \le k \le n \\ h(x''_{k-n}), & n+1 \le k \le n+m \end{cases}$.

נבדוק על קבוצת היוצרים כי $L \circ i = g$ וכי $L \circ j = h$ (באופן דומה):

$$L(i(x'_k)) = L(x_k) = g(x'_k) \implies L \circ i = g$$

בסך הכל, F_{n+m} מקיים את התכונה האוניברסלית של $F_n * F_m$,
ולכן $F_n * F_m \cong F_{n+m}$.

שאלה 3

יהיו A,B חבורות אבליות. הראה ש-$A\times B$ מקיימת בקטגוריה של החבורות האבליות שתי תכונות אוניברסליות: התכונה האוניברסלית ש-$G\times H$ מקיימת בקטגוריה של כל החבורות והתכונה האוניברסלית ש-$G*H$ מקיימת בקטגוריה של כל החבורות.

הוכחה:

ברור ש-$A\times B$ מקיימת את התכונה של $G\times H$.

לכן, מספיק לבדוק את התכונה של $G*H$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, bend left, "g"] & & \\
& A\times B \arrow[r, dashed, "L"] & K \\
B \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, bend right, "h"'] & &
\end{tikzcd}$$

בהינתן A,B, מחפשים $i: A\longrightarrow A\times B$, $j: B\longrightarrow A\times B$ כך שלכל חבורה אבלית K ולכל זוג הומומורפיזמים $g: A\longrightarrow K$, $h: B\longrightarrow K$ קיים הומומורפיזם יחיד $L: A\times B\longrightarrow K$ כך ש- $L\circ i=g$ ו- $L\circ j=h$.

נגדיר $i(a)=(a,1_B)$ לכל $a\in A$ ו- $j(b)=(1_A,b)$ לכל $b\in B$.

אלו, כמובן, הומומורפיזמים.

כעת, נניח כי נתונים g ו-h כנ"ל. נגדיר $L(a,b):=g(a)h(b)$.

L הומומורפיזם, כי לכל $a_1,a_2\in A$ ולכל $b_1,b_2\in B$ מתקיים

$$L((a_1,b_1)(a_2,b_2))=L(a_1a_2,b_1b_2)=g(a_1a_2)\,h(b_1b_2)=g(a_1)g(a_2)\,h(b_1)h(b_2)=$$

$$\overset{\text{אבלית!}}{=}g(a_1)h(b_1)\,g(a_2)h(b_2)=L(a_1,b_1)L(a_2,b_2)$$

כמו כן, לכל $a\in A$, $L(i(a))=L(a,1_B)=g(a)\cdot 1_K=g(a) \Leftarrow L\circ i=g$.

באופן דומה, $L\circ j=h$.

L נקבעת ביחידות, כי

$$L(a,b)=L((a,1_B)(1_A,b))=L(a,1_B)L(1_A,b)=L(i(a))L(j(b))=g(a)\,h(b)$$

שאלה 4

הראה ש- $Ab(G*H)\cong Ab(G)\times Ab(H)$.

הוכחה:

לפי השאלה הקודמת, ומפני ש- $Ab(G)$ ו- $Ab(H)$ אבליות, אפשר להשתמש בתכונה האוניברסלית של $Ab(G)*Ab(H)$ אם הכל אבלי.

רוצים להגדיר $\rho: G*H\longrightarrow Ab(G)\times Ab(H)$.

נעקוב אחרי הדיאגרמה הבאה (הסבר אחריה):

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, dashed, "g"] & Ab(G) \arrow[dr, "i'"] & \\
& G*H \arrow[r, dashed, "\rho"] & Ab(G)\times Ab(H) \\
H \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, dashed, "h"] \arrow[r, "\rho_2"'] & Ab(H) \arrow[ur, "j'"'] &
\end{tikzcd}$$

כדי להגדיר את ρ ביחידות מספיק להגדיר $g:G\longrightarrow Ab(G)\times Ab(H)$ ו- $h:H\longrightarrow Ab(G)\times Ab(H)$.

אבל אלו הומומורפיזמים מ-G ומ-H לחבורה אבלית, ולכן כדי להגדיר אותם ביחידות מספיק להגדיר הומומורפיזמים $Ab(G)\longrightarrow Ab(G)\times Ab(H)$ ו- $Ab(H)\longrightarrow Ab(G)\times Ab(H)$.

אבל כבר יש לנו הומומורפיזמים כאלו i',j' ($i'(x)=(x,1_H)$, $j'(y)=(1_G,y)$).

בסך הכל, ρ מוגדרת ביחידות ומקיימת

$$\rho\circ i=i'\circ\rho_1 \quad ; \quad \rho\circ j=j'\circ\rho_2$$

כעת, תהי חבורה אבלית K והומומורפיזם $f:G*H\longrightarrow K$.

לפי התכונה האוניברסלית של מכפלה חופשית (כפי שהוסבר בהתחלה), כדי להגדיר $L:Ab(G)\times Ab(H)\longrightarrow K$, מספיק להגדיר $g':Ab(G)\rightarrow K$ ו- $h':Ab(H)\rightarrow K$.

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "i"'] \arrow[drr, dashed, "f_1"] & Ab(G) \arrow[dr, dashed, "g'"] & \\
& G*H \arrow[r, "f"] & K \\
H \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, dashed, "f_2"] \arrow[r, "\rho_2"'] & Ab(H) \arrow[ur, dashed, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

נגדיר אותן באמצעות הדיאגרמה משמאל:

כדי להגדיר (ביחידות) את g' ואת h' מספיק להגדיר $f_1:G\rightarrow K$ ו- $f_2:H\rightarrow K$.

אבל אלו מוגדרות לפי $f_1:=f\circ i$ ו- $f_2:=f\circ j$. מתקיים $f\circ i=g'\circ\rho_1$ ו- $f\circ j=h'\circ\rho_2$.

$$\begin{tikzcd}
Ab(G) \arrow[dr, "i'"'] \arrow[drr, "g'"] & & \\
& Ab(G)\times Ab(H) \arrow[r, dashed, "L"] & K \\
Ab(H) \arrow[ur, "j'"] \arrow[urr, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

אם כן, קיימת יחידה $L:Ab(G)\times Ab(H)\longrightarrow K$ המקיימת $L\circ i'=g'$ ו- $L\circ j'=h'$.

כעת, רוצים לוודא כי $L\circ\rho=f$.

מספיק לבדוק $L\circ\rho\circ i=f\circ i$ ו- $L\circ\rho\circ j=f\circ j$. נבדוק עבור i:

$$L\circ\rho\circ i=L\circ(\rho\circ i)=L\circ(i'\circ\rho_1)=(L\circ i')\circ\rho_1=g'\circ\rho_1=f\circ i$$

שאלה 5

הראה ש- $Ab(F_n)\cong\mathbb{Z}^n$.

הוכחה:

נוכיח באינדוקציה על n.

עבור $n=1$, $Ab(F_1)\cong Ab(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.

נניח כי הטענה נכונה עבור $n\in\mathbb{N}$ כלשהו, ונוכיח אותה עבור $n+1$.

$$Ab(F_{n+1})\cong Ab(F_n * F_1)\cong Ab(F_n)\times Ab(F_1)\cong\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^{n+1}$$

כדרוש.

שאלה 6

הראה שההעתקות $i:G\longrightarrow G*H$ ו- $j:H\longrightarrow G*H$ המופיעות בבניה האוניברסלית הן חד-חד ערכיות. לכן, ניתן לחשוב על G ועל H כתת-חבורות של $G*H$.

הוכחה:

נוכיח עבור i (ההוכחה עבור j דומה).

נגדיר העתקות $\varphi:G\longrightarrow G$ ע"י $\varphi(x)=x$ $(\varphi=Id_G)$

$\psi:H\longrightarrow G$ ע"י $\psi(x)=1_G$ (ψ ההומומורפיזם הטריוויאלי).

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[dr, "i"] \arrow[drr, "\varphi"] & & \\
& G*H \arrow[r, dashed, "L"] & G \\
H \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, "\psi"'] & &
\end{tikzcd}
$$

לפי התכונה האוניברסלית של $G*H$, קיים הומומורפיזם $L:G*H\longrightarrow G$ המקיים

$\underbrace{L\circ i=\varphi=Id_G}$ $\qquad L\circ j=\psi$

לכן i פונקציה הפיכה משמאל, ובפרט חד-חד ערכית.