תרגיל 6

1. יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ שני מרחבים טופולוגים כך ש־Y בעל תכונה T_2. תהנה $f,g:X\to Y$ פונקציות רציפות ומזדהות על תת קבוצה צפופה A של X. הוכיחו כי $f=g$.
הפריכו את הטענה הקודמת על Y שאינו מקיים T_2.
<u>פתרון:</u>

נניח בשלילה שקיים $x\in X$ כך ש־$f(x)\neq g(x)$. אזי קיימות סביבות פתוחות זרות $V,U\in\sigma$ כך ש־$f(x)\in V, g(x)\in U$ וגם $U\cap V=\emptyset$. מרציפות נקבל כי $f^{-1}(V),g^{-1}(U)$ פתוחות. מכאן שגם $O:=f^{-1}(V)\cap g^{-1}(U)$ פתוחה ב־X והיא אינה ריקה כי היא מכילה את x. כיוון ש A צפופה היא נחתכת באופן לא ריק עם O, כלומר, קיים $x'\in O\cap A$. נתון שהפונקציות זהות על A ולכן $f(x')=g(x')$. מנגד,

$$x'\in O=f^{-1}(V)\cap g^{-1}(U)\Rightarrow f(x')\in V\wedge g(x')\in U$$

ביחד אנחנו מקבלים ש־

$$f(x')=g(x')\in U\cap V=\emptyset$$

וזו סתירה.

הדוגמה הכי קלה כאשר Y אינו מקיים את T_2. היא לקחת את הטופולוגיה הטריוויאלית ושתי פונקציות שמזדהות על נקודון.

2. אם $A,B\subseteq X$ קשירות, הוכיחו או הפריכו:

   (א) הפנים של A קשיר

   (ב) $A\cup B$ קשיר

   (ג) $A\cap B$ קשיר

   <u>פתרון:</u>

   כל הסעיפים הן הפרכות!

   בסעיף הראשון אפשר לקחת כדוגמה נגדית שני עיגולים מלאים שמשיקים בנקודה.

   בסעיף השני שני מעגלים זרים

   בסעיף השלישי אפשר לקחת חיתוך של שני מעגלים שנחתכים בשתי נקודות.

3. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי קשיר. <u>נקודה חוצה</u> היא נקודה $x\in X$ כך ש־$X\setminus\{x\}$ לא קשירה. הוכיחו שאם $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ הומיאומורפיזם, אז x חוצה אם ורק אם $f(x)$ חוצה.
השתמשו בתוצאה זו כדי למיין את הקטעים (פתוחים\סגורים\שאר האפשרויות) עד כדי הומאומורפיזם.
<u>פתרון</u>

ראשית נראה שאם $x \in X$ חוצה אז כך גם $f(x) \in Y$. לפי הגדרה, קיימים $A, B \in \tau \setminus \{\emptyset, X\}$ כך ש־$A \cap B \subseteq \{x\}$ וגם $A \cup B \supseteq X \setminus \{x\}$. מכיון ש־$f$ היא הומיאומורפיזם, f^{-1} רציפה ולכן

$$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A) \in \sigma \setminus \{\emptyset, Y\}$$

באופן דומה, $f(B) \in \sigma \setminus \{\emptyset, Y\}$. קל לוודא ש־$f(A) \cap f(B) \subseteq \{f(x)\}$ וגם ש־$f(A) \cup f(B) \supseteq Y \setminus \{f(y)\}$. לכן ישנה חלוקה לא טריוויאלית של $Y \setminus \{f(x)\}$ לקבוצות פתוחות מה שאומר ש־$Y \setminus \{f(y)\}$ אינה קשירה. לפי הגדרה $f(x)$ מחלקת את Y.

טיעון זהה על f^{-1} יראה את הגרירה השניה.

מסקנה ישירה מכאן היא שעוצמת הנקודות המחלקות ועוצמת הנקודות שאינן מחלקות הן תכונות טופולוגיות שנשמרות תחת הומיאומורפיזם. יהיו $a < b \in \mathbb{R}$, נמיין את הקטעים לפי מספר הנקודות שאינן מחלקות:

(א) (a, b) ־ אין נקודות שאינן מחלקות (כל נקודה היא מחלקת)

(ב) $(a, b]$ ־ ישנה נקודה לא מחלקת אחת (b)

(ג) $[a, b)$ ־ ישנה נקודה לא מחלקת אחת (a)

(ד) $[a, b]$ ־ ישנן שתי נקודות לא מחלקות (a, b).

מכאן ש־$(a, b), (a, b]$ ו־$[a, b]$ בהכרח לא שקולים הומיאומורפית. בנוסף, קל לראות ש־$[a, b) \backsimeq (a, b]$ ושלכל $a' < b' \in \mathbb{R}$ מתקיים ש־$(a, b) \backsimeq (a', b')$ וטענה דומה תקפה לגבי שאר סוגי הקטעים. אז קטעים מסוג א',ב' ו־ד' מייצגים את כל מחלקות ההומיאומורפיזם.

4. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי ו־$Y \subseteq X$. אם $\overline{Y} = X$ (כלומר Y צפופה ב־X) ו־Y קשיר, אז גם X קשיר. הסיקו שרכיבי הקשירות הם סגורים

<u>פתרון:</u>

נניח בשלילה ש־X לא קשיר. אז קיימים $A, B \in \tau$ כך ש־$A \cap B = \emptyset$ אבל $A \cup B = X$. לפי הגדרת טופולוגיית תת המרחב מתקיים ש־$Y \cap A, Y \cap B \in \tau_Y$. בנוסף, עדיין קל לראות ש־$Y = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$ וגם $(Y \cap A) \cap (Y \cap B) = \emptyset$. זה פירוק טופולוגי של Y אבל מכיון ש־Y קשירה, הוא חייב להיות טריוויאלי. כלומר, $Y \cap A = \emptyset$ או $Y \cap B = \emptyset$. מכיון ש־$A, B \in \tau$ ו־Y צפופה, שתי האפשרויות הללו מהוות סתירה. כעת נראה שרכיבי הקשירות סגורים. <u>אכן</u>, נניח ש־$x \in X$ ונסתכל על $[x]$. לפי הגדרה הוא קשיר ולכן לפי מה שכרגע ראינו, $\overline{[x]}$ קשיר גם כן. מנגד, לפי הגדרת רכיב קשירות מתקיים

$$\overline{[x]} \subseteq [x]$$

לפי משפט מההרצאה, $[x]$ סגורה, כרצוי.

5. הוכיחו או הפריכו: $SO_n(\mathbb{R})$, כלומר מרחב המטריצות A שמקיימות $AA^T = I$, הוא קשיר.

<u>פתרון:</u>

ניזכר שהדטרמיננטה היא כיפלית וגם ש־$\det\left(A^T\right) = \det(A)$ ולכן

$$AA^T = I \Rightarrow \det(AA^t) = 1 \Rightarrow \det(A)^2 = 1 \Rightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$$

כלומר $\det(SO_n(\mathbb{R})) \subseteq \{-1,1\}$. מנגד, קל לראות שבפועל

$$\det(SO_n(\mathbb{R})) = \{-1,1\}$$

ראינו ש־$\det : Mat_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ היא רציפה. לו $SO_n(\mathbb{R})$ הייתה קשירה, כך הייתה גם כל תמונה רציפה שלה (לפי משפט מההרצאה). זה היה משליך ש־$\{-1,1\}$ גם היא קשירה, מה שלא נכון.

6. מתי הטופולוגיה הקו־סופית קשירה? הוכיחו שאם X מעוצמה גדולה או שווה לעוצמת הרצף אז היא קשירה מסילתית.
<u>פתרון:</u>

הטופולוגיה הקו־סופית קשירה כאשר X אינסופית או כאשר X היא נקודון או קבוצה ריקה. ברור שאם X הינה נקודות אז היא קשירה. נראה כעת שאם X אינה נקודון, אז היא קשירה אם ורק אם היא אינסופית.

ראשית, נראה שאם X לא קשירה אז היא סופית. אכן, אם $A \subseteq X$ קבוצה סגוחה לא טריוויאלית, אז מתקיים ש־$A, A^c \in \tau_{cof} \setminus \{\emptyset, X\}$. לפי הגדרת הטופולוגיה אנחנו יודעים ש־

$$|A|, |A^c| < \infty$$

מכאן ש־

$$|X| = |A| + |A^c| < \infty$$

כרצוי.

מנגד, ראינו שאם X סופית אז τ_{cof} דיסקרטית. וידוע שקבוצה דיסקרטית עם יותר מאיבר אחד אינה קשירה.
נניח ש־$|X| \geq \aleph$ ויהיו $a, b \in X$. לפי הגדרת היחס בין עוצמות, ניתן למצוא שיכון חח"ע $f : (0,1) \to X \setminus \{a,b\}$. נגדיר $\overline{f} : [0,1] \to X$ ע"י

$$\overline{f}(r) := \begin{cases} a & r = 0 \\ f(r) & 0 < r < 1 \\ b & r = 1 \end{cases}$$

אנחנו טוענים שהפונקציה הזו רציפה. נראה זאת לפי משפט הקריטריון לרציפות שאומר שפונקציה היא רציפה אם ורק אם התמונה של כל קבוצה סגורה היא סגורה. אנחנו מכירים שקבוצות סגורות בטופולוגיה הקו־סופית אם ורק אם הן סופיות. קל לראות שהפונקציה הזו היא חח"ע ולכן לכל $A \subseteq X$ מתקיים

$$|\overline{f}^{-1}(A)| \leq |A|$$

בפרט, אם A סופית (סגורה) אז גם $\overline{f}^{-1}(A)$ סופית. מכיוון ש־$[0,1]$ מקיימת את T_1, ראינו בתרגול הקודם שכל קבוצה סופית היא סגורה. זה מוכיח ש־$\overline{f}$ היא רציפה ולכן X קשירה מסילתית.

7. יחסית קל להוכיח שאם פונקציה אנליטית $f : \Omega \to \mathbb{C}$ מתאפסת על סדרה $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Omega$ שמתכנסת ל־$x \in \Omega$ אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש־$f_{|B(x,\varepsilon)} \equiv 0$. הראו שבנסיבות כאלה כש־$\Omega$

תת קבוצה קשירה של $\mathbb{C}$ אז מתקיים ש־$f \equiv 0$.
פתרון:

נגדיר

$$O := \{x \in \Omega \mid \exists\ \varepsilon > 0 : f_{|B(x,\varepsilon)} \equiv 0\} \subseteq \Omega$$

קל לראות ש־O פתוחה ב־Ω. בנוסף, לפי הנתון A סגורה סדרתית ב־Ω. אנחנו יודעים שבמרחבים מטרים סגור וסגור סדרתי שקולים ולכן O סגורה. בעצם הצלחנו להוכיח ש־O סגוחה ב־Ω. אנחנו גם יודעים מהנתון שהיא לא ריקה. מכיוון ש־Ω קשירה אנחנו מסיקים ש־$O = \Omega$ ובפרט $f \equiv 0$.

8. הוכיחו שאם (X, τ) מקיים את T_2 ולכל $x \in X$ ו־$x \in U \in \tau$ קיימת $x \in V \in \tau$ כך ש־$V \subseteq U$ ו־V סגוחה אז X בלתי קשיר לחלוטין. הסיקו שכל מרחב אולטרה־מטרי הוא בלתי קשיר לחלוטין
הערה: למרחב שמקיים את התנאי הזה קוראים מרחב ממימד אפס.
הערה 2: כדי להוכיח את הטענה שלנו, מספיק שהמרחב יקיים את T_0 אבל לא ניכנס לזה כרגע.
פתרון:

נניח בשלילה ש־X אינה בלתי קשירה לחלוטין. כלומר, קיים $x \in X$ כך שמרכיב הקשירות שלו $[x]$ מכיל איבר נוסף $x \neq y \in [x]$. מכיוון ש־X מקיימת את T_2 נבחר סביבה $x \in U \in \tau$ כך ש־$y \notin U$. כעת, נשתמש בעובדה שהמרחב ממימד אפס כדי למצוא $U' \in \tau$ סגוחות כך ש־$x \in U' \subseteq U$. לבסוף, נשים לב ש־

$$[x] = ([x] \cap U') \sqcup \Big([x] \cap (U')^c\Big)$$

הוא פירוק טופולוגי לא טריוויאלי של $[x]$ (משום ש־$x \in [x] \cap U' \neq \emptyset$ ו־$y \in [x] \cap (U')^c \neq \emptyset$). מנגד, למדנו שרכיבי הקשירות תמיד קשירים וזו סתירה.

כעת, נראה שכל מרחב אולטרה־מטרי הוא ממימד אפס על ידי זה שנראה שכל כדור פתוח הוא סגור (כלומר סגוח). נניח ש־(Y, d) הוא מרחב אולטרה־מטרי, יהי $x \in Y$ ו־$r > 0$. נראה ש־$B(x, r)$ סגור על ידי זה שנראה ש־$B(x, r)^c$ פתוח. אז נניח ש־$y \in B(x, r)^c$. לפי הגדרה $d(x, y) \geq r$. אנחנו טוענים ש־$B\Big(y, \frac{r}{2}\Big) \subseteq B(x, r)^c$. אכן, אם זה לא המצב אז קיים $z \in B\Big(y, \frac{r}{2}\Big) \cap B(x, r)$. לפי אי שיוויון המשולש החזק

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} < r$$

וזו סתירה מה שמוכיח את הטענה שלנו.

9. נסתכל על טופולוגיית סורגנפרי τ_s על $\mathbb{R}$ שמוגדרת כאיחוד של כל הקטעים מהצורה $[a, b)$, כלומר

$$\tau_s := \Big\{ \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i) \mid \forall i \in I : a_i, b_i \in \mathbb{R} \Big\}$$

(א) הראו שהטופולוגיה הזו בלתי קשירה לחלוטין

(ב) הסיקו שכל פונקציה רציפה $f:\left(\mathbb{R},\tau_{|*|}\right)\to(\mathbb{R},\tau_S)$ מהטופולוגיה האוקלידית הינה קבועה.

(ג) מה היחס בינה ובין הטופולוגיה האוקלידית?

(ד) הראו שהיא ספרבילית

פתרון:

ראשית נראה שקרנות מהסוג $(-\infty,b)$ גם נמצאות בטופולוגיה. זה קל לראות משום ש־

$$(-\infty,b)=\bigcup_{a<b}[a,b)$$

הטיעון לקרנות מהסוג השני דומה. כעת, נראה ש־$[a,b)$ סגוחה. ברור שהיא פתוחה ובנוסף המשלים

$$[a,b)^c=(-\infty,a)\cup[b,\infty)$$

גם פתוח כאיחוד של קבוצות פתוחות. קל לראות מהגדרת הטופולוגיה שלכל סביבה יש תת סביבה מהצורה $[a,b)$ ולכן זה מרחב טופולוגי ממימד אפס. לפי התרגיל הקודם, הוא בלתי קשיר לחלוטין.

ראינו בהרצאה שפונקציות רציפות משמרות קשירות. $\mathbb{R}$ קשיר ולכן התמונה שלו ב־$(\mathbb{R},\tau_s)$ צריכה להיות קשירה גם כן. עם זאת, ראינו שהישר של סורגנפרי בלתי קשיר לחלוטין ולכן הקבוצות הקשירות הן הנקודונים בלבד. במילים אחרות התמונה של הפונקציה היא נקודון ולכן היא קבועה.

אפשר לראות ש־

$$(a,b)=\bigcup_{a<a'}[a',b)$$

ולכן כל קבוצה פתוחה בטופולוגיה האוקלידית פתוחה גם בישר של סורגנפרי. במילים אחרות $\tau_e\subsetneq\tau_s$. מנגד, אנחנו יודעים ש־$[a,b)$ לא פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ולכן הטופולוגיה של סורגנפרי חזקה מהטופולוגיה האוקלידית.

לבסוף, אפשר להראות ממש בקלות (אותה הוכחה כמו של הממשיים) שקבוצת הרציונלים צפופה בישר של סורגנפרי מה שעושה אותו ספרבילי.

10. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ תת קבוצה. הוכיחו ש־$\mathbb{R}\setminus A$ היא בלתי קשירה לחלוטין אם ורק אם A צפופה.

פתרון:

ראשית נניח ש־$\mathbb{R}\setminus A$ בלתי קשירה לחלוטין. זה אומר ש־$\mathbb{R}\setminus A$ לא מכילה אף תת־קבוצה קשירה לא טריוויאלית. בפרט, היא לא מכילה אף קטע פתוח. במילים אחרות, כל קטע פתוח חותך את A מה שאומר ש־A צפופה.

מנגד, נניח ש־A צפופה ונראה ש־$\mathbb{R}\setminus A$ בלתי קשירה לחלוטין. נניח בשלילה שקיימת תת קבוצה קשירה $B\subseteq\mathbb{R}\setminus A$. פונקציית ההכלה $i:B\to\mathbb{R}$ היא וודאי רציפה ולכן מקבלת את תכונת ערך הביניים. B אינה טריוויאלית ולכן קיימים $x<y\in B$. מכאן שהקטע

$$(x,y)=(i(x),i(y))\subseteq Im\,i=B\subseteq\mathbb{R}\setminus A$$

בעצם מצאנו קטע פתוח שלא חותך את A, בסתירה לצפיפות שלה.

11. אנחנו נגיד שהמרחב (X,τ) קשיר מקומית ב־$x \in X$ אם לכל סביבה $U \in N(x)$ קיימת $V \in N(x)$ קשירה כך ש־$V \subseteq U$. אם זה נכון לכל $x \in X$ אז נגיד ש־X קשיר מקומית. הוכיחו שכל תת קבוצה פתוחה במרחב נורמי היא קשירה מקומית (ולא תמיד קשירה)
<u>פתרון:</u>

ראינו בהרצאה שכל כדור במרחב נורמי הוא קשיר מסילתית ולכן קשיר (כי הוא קמור). כל קבוצה פתוחה במרחב נורמי מכילה כדור ולכן בעצם מכילה סביבה פתוחה קשירה. כדי למצוא דוגמה לקבוצה פתוחה במרחב נורמי שאינה קשירה מספיק להתסכל על שני כדורים פתוחים שלא חותכים זה את זה.

12. תנו דוגמה של תת מרחב של $\mathbb{R}^2$ שהוא קשיר אבל לא קשיר מקומית
<u>פתרון:</u>

ניקח את <u>גרף הסינוס הטופולוגי</u>:

$$S := \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x} \right) \mid x \in (0,1] \right\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ראשית נראה שהוא קשיר. נסמן $G := S \setminus \{(0,0)\}$ ו־$f(x) = \sin\frac{1}{x}$. קל לראות ש־G היא תמונה רציפה של הקטע $(0,1]$ ולכן קשירה. מנגד, G צפופה ב־S ולכן לפי תרגיל 4, גם $S = \overline{G}$ קשירה.

אנחנו טוענים ש־S לא קשירה מקומית ב־$(0,0)$. אכן, לכל סביבה U של $(0,0)$ קיים כדור $B(0,\varepsilon)$ כך ש־$B(0,\varepsilon) \subseteq U$. קיימים $0 < x_1 < x_2 < x_3 < \varepsilon$ כך ש־

$$f(x_1) = f(x_3) = 0, f(x_2) = 1$$

ברור ש־

$$(x_1, f(x_1)), (x_3, f(x_3)) \in S \cap B(0,\varepsilon),\ \ (x_2, f(x_2)) \notin B(0,\varepsilon)$$

נסתכל על פונקציית ההטלה $\pi : G \to (0,1]$ שמוגדרת לפי

$$\pi((x, f(x)) := x$$

קל לוודא שהפונקציה הזו רציפה. אנחנו טוענים ש־x_1 ו־x_3 נמצאים ברכיבי קשירות שונים. לו זה לא היה המצב, אז הייתה קבוצה קשירה $C \subseteq S \cap B(0,\varepsilon)$ כך ש־$x_1, x_3 \in C$. אבל אז גם $\pi(C) \subseteq (0,1]$ הייתה קשירה כתמונה רציפה של מרחב קשיר. מתכונת ערך הביניים ב־$\mathbb{R}$, זה בהכרח אומר ש־$x_2 \in \pi(C)$ ולכן $(x_2, f(x_2)) \in C \subseteq S \cap B(0,\varepsilon)$, אבל זו סתירה למה שכבר ראינו על x_2.

13. השלימו את הטבלה

מרחב טופולוגי	קשיר	קשיר מקומית	קשיר מסילתית	בלתי קשיר לחלוטין
המרחב הדיסקרטי	רק אם הוא נקודון	כן	רק אם הוא נקודון	כן
הטופולוגיה הטריוויאלית	כן	כן	כן	רק אם הוא נקודון
$\mathbb{R}^n$	כן	כן	כן	לא
$[0,1]$	כן	כן	כן	לא
$(\mathbb{Z}, d_p)$	לא	לא	לא	כן
$(\mathbb{Q}, d_p)$	לא	לא	לא	כן
$(\overline{\mathbb{Z}}, d_p)$	לא	לא	לא	כן
$(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$	לא	לא	לא	כן
l_1	כן	כן	כן	לא
l_2	כן	כן	כן	לא
l_∞	כן	כן	כן	לא
$(C[0,1], d_\infty)$	כן	כן	כן	לא
$(C[0,1], d_1)$	כן	כן	כן	לא
$(\{a,b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$	לא	לא	לא	לא
(X, τ_{cof}) עבור X אינסופי	כן	כן	אם $|X| \geq \aleph$	לא
(X, τ_{coc}) עבור X לא בן מניה	כן	כן	כן	לא
$([0,1]^2, <_{lex}, \tau_{<_{lex}})$	כן	כן	כן	לא
$(\mathbb{R}, \tau_s)$	לא	לא	לא	כן
סינוס טופולוגי	כן	לא	לא	לא