פתרון תרגיל 9 טופולוגיה תשע"ו

18 במאי 2016

1. נסמן את טופולוגיית המכפלה ב־τ_π. נגדיר מטריקה על X באופן הבא:

$$d_{\max}(x,y)=\max\{d_i(x_i,y_i)\,|1\le i\le n\}$$

כאשר d_i המטריקה של X_i, $x=(x_1,\dots,x_n)\,,y=(y_1,\dots,y_n)$ (בדקו שזו אכן מטריקה).
המטריקה $d_{\max}$ משרה טופולוגיה $\tau_{\max}$. נראה שמתקיים: $\tau_\pi=\tau_{\max}$.
לצד אחד, נראה שפונקציות ההטלה: $p_i:(X,d_{\max})\to(X_i,d_i)$ רציפות.
אם כן, יהי $x\in X$ ויהי $0<\varepsilon$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל:

$$d_i(p_i(x),p_i(y))=d_i(x_i,y_i)\le\max\{d_i(x_i,y_i)\,|1\le i\le n\}=d_{\max}(x,y)<\delta=\varepsilon$$

ולכן $d_i(p_i(x),p_i(y))<\varepsilon$, והפונקציות p_i אכן רציפות.
הטופולוגיה τ_π היא החלשה ביותר בה ההטלות רציפות, ולכן $\tau_\pi\subseteq\tau_{\max}$.
לצד השני, נשים לב לעובדה הבאה:

$$y\in B_{d_{\max}}(x,\varepsilon)\iff d_{\max}(x,y)<\varepsilon\iff\max\{d_i(x_i,y_i)\,|1\le i\le n\}<\varepsilon$$

$$\iff\forall i,d_i(x_i,y_i)<\varepsilon\iff\forall i,y_i\in B_{d_i}(x_i,\varepsilon)\iff y\in\prod B_{d_i}(x_i,\varepsilon)$$

כלומר, כל כדור במטריקה $d_{\max}$ אפשר להציג כמכפלת כדורים מהמטריקות d_i.
נסמן: $C_{\max}=\{B_{d_{\max}}(x,\varepsilon):x\in X,\varepsilon>0\}$. נסמן גם: $C_\pi=\{\prod B_{d_i}(x_i,\varepsilon)\,|x_i\in X_i,\varepsilon>0\}$.
קיבלנו ש: $C_{\max}\subseteq C_\pi$.
$C_{\max}$ הוא בסיס של $\tau_{\max}$, C_π הוא בסיס של τ_π ולכן $\tau_{\max}\subseteq\tau_\pi$.
בסה"כ, $\tau_\pi=\tau_{\max}$ ולכן מרחב המכפלה (עם טופולוגיית המכפלה) הוא מטריזבילי.

2. לפי התרגיל הקודם, $X\times X$ מטריזבילי, והטופולוגיה τ_π מושרית מהמטריקה $d_{\max}$.
נראה, אם כן, שהפונקציה d רציפה לפי המטריקה $d_{\max}$ ולכן גם רציפה לפי τ_π.

תהי $(x,y)\in X\times X$ ויהי $0<\varepsilon$. נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$. כעת, אם $d_{\max}\left(\left(x,y\right),\left(z,w\right)\right)<\delta$ אז:

$$\left|d\left(x,y\right)-d\left(z,w\right)\right|\leq d\left(x,y\right)+d\left(z,w\right)<\delta+\delta=\varepsilon$$

ולכן d רציפה (המעבר הראשון נובע מא"ש המשולש).

3. לצד אחד, נניח שהמרחב X האוסדורף. נניח בשלילה שהקבוצה Δ אינה סגורה, כלומר $cl\left(\Delta\right)\neq\Delta$.

מכיוון ש: $\Delta\subset cl\left(\Delta\right)$, נקבל שקיים $(x,y)\in cl\left(\Delta\right)$ כך ש: $(x,y)\notin\Delta$.

מהגדרת האלכסון, נקבל ש: $x\neq y$.

מכיוון ש-X האוסדורף, קיימות סביבות $x\in U,y\in V$ זרות.

מהגדרת טופולוגיית המכפלה, נקבל ש-$U\times V$ היא סביבה (בסיסית) של (x,y), אך מתקיים:

$$\left(U\times V\right)\cap\Delta=\emptyset$$

(אחרת, נקבל שקיים איבר משותף, ומהגדרת האלכסון פירוש הדבר ש-$(a,a)\in U\times V$, בסתירה לכך ש-U,V זרות).

נקודה נמצאת בסגור אם ורק אם כל הסביבות (הבסיסיות) שלה נחתכות עם הקבוצה באופן לא ריק, ולכן $(x,y)\notin cl\left(\Delta\right)$ וסתירה.

לצד שני, נניח שהאלכסון סגור ב-$X\times X$. נניח בשלילה שהמרחב X אינו האוסדורף.

לפיכך, קיימות $x,y\in X$ שונות כך שלכל שתי סביבות $x\in U,y\in V$, מתקיים $U\cap V\neq\emptyset$.

לכן, לכל סביבה (בסיסית) $(x,y)\in U\times V$ מתקיים $\left(U\times V\right)\cap\Delta\neq\emptyset$ (כי הסביבות לא זרות, ולכן תמיד קיים $a\in U\cap V$, ואז $(a,a)\in\left(U\times V\right)\cap\Delta$).

זה נכון לכל סביבה (בסיסית), ולכן $(x,y)\in cl\left(\Delta\right)$.

לפיכך, $cl\left(\Delta\right)\neq\Delta$ ולכן Δ לא קבוצה סגורה וסתירה.

4. נשתמש בהגדרת הבסיס של טופולוגיית המכפלה.

(א) מהגדרת המכפלה הקרטזית, מתקיים:

$$\left(A\times B\right)^{c}=\left(X\times\left(Y\backslash B\right)\right)\cup\left(\left(X\backslash A\right)\times Y\right)$$

הקבוצות $X,X\backslash A\subseteq X,Y,Y\backslash B\subseteq Y$ פתוחות (כי A,B סגורות), ומהגדרת טופולוגיית המכפלה הקבוצות $\left(X\times\left(Y\backslash B\right)\right),\left(\left(X\backslash A\right)\times Y\right)\subseteq X\times Y$ פתוחות.

לכן $\left(A\times B\right)^{c}\subseteq X\times Y$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות), ולכן $A\times B$ סגורה.

(ב) לצד אחד, $cl\left(A\right)\subseteq X,cl\left(B\right)\subseteq Y$ סגורות.

לפי הסעיף הקודם, גם $cl\left(A\right)\times cl\left(B\right)$ סגורה.

$A \subseteq cl\left(A\right), B \subseteq cl\left(B\right)$ ולכן $A \times B \subseteq cl\left(A\right) \times cl\left(B\right)$.
ממינימליות הסגור נקבל:

$$cl\left(A \times B\right) \subseteq cl\left(A\right) \times cl\left(B\right)$$

לצד שני, תהי $(a,b) \in cl\left(A\right) \times cl\left(B\right)$.
מהגדרת סגור, לכל שתי סביבות $a \in U \subseteq X, b \in V \subseteq Y$ מתקיים: $U \cap A \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset$.
לכן, לכל סביבה (בסיסית) $U \times V$ של (a,b) מתקיים: $(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset$.
לכן, $(a,b) \in cl\left(A \times B\right)$, כלומר $cl\left(A \times B\right) \supseteq cl\left(A\right) \times cl\left(B\right)$.

(ג) מהגדרת ספרביליות, קיימות $A \subseteq X, B \subseteq Y$ צפופות ובנות מניה.
מהסעיף הקודם:

$$cl\left(A \times B\right) = cl\left(A\right) \times cl\left(B\right)$$

כלומר:

$$cl\left(A \times B\right) = X \times Y$$

ולכן $A \times B \subseteq X \times Y$ צפופה.
מכיוון שהקבוצות A, B הן בנות מניה גם $A \times B$ בת מניה (למתקדמים: הוכיחו זאת. יש להשתמש בלמה של צורן ובהרבה מצב רוח).
לכן $X \times Y$ ספרבילי.

5. נגדיר $g : X \to Y$ על ידי $g\left(x\right) = v_x$.
g מתקבלת על ידי צמצום הטווח של הפונקציה $G : X \to \prod_{i \in I} X$ המוגדרת על ידי $G\left(x\right) = v_x$.
G רציפה (כי היא רציפה רכיב־רכיב; בכל רכיב זו פונקציית הזהות) ולכן גם g רציפה.
נקבע $i_1 \in I$. קל לראות שהפונקציה $p_{i_1} : \prod_{i \in I} X \to X$ היא רציפה, ולכן גם $p_{i_1} : Y \to X$ המתקבלת על ידי צמצום התחום רציפה.
p_{i_1} היא ההופכית של g, ולכן g הומיאומורפיזם.

6. אנו יודעים שמספיק להראות שכל נקודון הוא סגור במרחב המכפלה.
אם כן, יהי $\prod \left\{x_i\right\}$ נקודון. המשלים שלו הוא הקבוצה:

$$\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$$

כאשר $Y_{i,j} = X_j$ אם $i \neq j$ ו־ $Y_{i,j} = X_j \backslash \left\{x_j\right\}$ אם $i \neq j$.
בכל מקרה, $Y_{i,j} \subseteq X_j$ פתוחה (אם $i = j$, מכיוון ש־X_j הוא T_1 הנקודון $\left\{x_j\right\} \subseteq X_j$ הוא סגור ולכן $X \backslash \left\{x_j\right\}$ פתוחה).

מהגדרת טופולוגיית המכפלה, $\prod_j Y_{i,j} \subseteq \prod_j X_j$ פתוחה ולכן גם $\bigcup_i \prod_j Y_{i,j}$ פתוחה (כאיחוד של פתוחות).
לכן $\prod \{x_i\}$ סגורה.

7. יהי $a \in X$, ונתבונן בקבוצה $X \times \{a\} \subseteq X \times X$.
משאלה 4, $X \times \{a\}$ סגורה לפי טופולוגיית המכפלה.
מאידך גיסא, בטופולוגיה הקו־סופית הקבוצה $X \times \{a\}$ אינה סגורה (כי היא אינסופית ולא שווה למרחב כולו).
לכן τ_π היא לא הטופולוגיה הקו־סופית.

8. נתבונן ב־$\mathbb{R}$ עם הטופולוגיה הטריוויאלית. הקבוצה $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ צפופה (חשבו למה).
נגדיר שתי פונקציות:

$$g(x) = x, f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

הפונקציות רציפות (כל פונקציה אל מרחב טריוויאלי היא רציפה), שונות, ומתלכדות על $\mathbb{Q}$.

9. נגדיר פונקציה $f : X \times Y \to Y \times X$ על ידי:

$$f(x, y) = (y, x)$$

נשים לב לכך שהפונקציה:

$$p_1 \circ f : X \times Y \to Y$$

שווה לפונקציה $p_2 : X \times Y \to Y$ ולכן רציפה. כמו כן הפונקציה:

$$p_2 \circ f : X \times Y \to X$$

שווה לפונקציה $p_1 : X \times Y \to X$.
לכן הפונקציות $p_1 \circ f, p_2 \circ f$ רציפות ולכן גם f רציפה.
קל לראות שההופכית של f היא הפונקציה:

$$f^{-1} : Y \times X \to X \times Y$$

המוגדרת על ידי $f^{-1}(y, x) = (x, y)$.
f^{-1} רציפה (בדומה ל־f) ולכן f הומיאומורפיזם.