תרגול השלמה
30 אוגוסט, 2016

<u>תרגיל השלמה לתרגול קודם:</u>

האם ניתן לחשב את האינטגרל הבא באופן מדויק? אם לא, הסבר מדוע. אם כן, מצא מספר נקודות הדרושות וחשבו את האינטגרל.

$$\int_0^2 \frac{(x^2-1)(1+2x)}{\sqrt{x(2-x)}}dx$$

<u>פתרון:</u>

נעביר את הקטע $[0,2]$ לקטע $[-1,1]$:

$$t=\frac{2}{b-a}(x-b)+1$$

$$t=\frac{2}{2}(x-2)+1$$

$$\boxed{t=x-1}$$

וכעת –

$$\int_{-1}^{1}\frac{[(t+1)^2-1]*[1+2(t+1)]}{\sqrt{(t+1)(2-t-1)}}dt=\int_{-1}^{1}\frac{(t^2+2t)(2t+3)}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

וזה מזכיר את משקולת צ'ביצ'ב.

$$f(t)=2t^3+7t^2+6t$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}*f(t)dt$$

אנחנו בקטע $[-1,1]$. יש פו' משקל – $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. לכן נשתמש בפולינום צ'ביצ'ב.

$$E_n=\frac{\pi}{(2n)!*2^{2n-1}}*f^{(2n)}(c)$$

כאשר $c\in[-1,1]$. נרצה ש - $E_n=0$.

$f(t)$ פולינום ממעלה 3 ולכן

$$f^{(2n)}(c)=0\ \ =>\ \ 2n=4\ \ =>\boxed{n=2}$$

מכאן הפולינום האופייני הינו (מהטבלה) -

$$T_2(t)=2t^2-1$$

ושורשי הפ"א האופייני (שהם הצמתים) הינם -

$$\begin{cases} t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

ולזאת הגענו מכאן -

$$t_i = \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2n}\right] = \cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{4}\right] \ , \qquad i = 1,2$$

כעת –

$$w_i = \frac{\pi}{n} \ => \ \boxed{w_1 = \frac{\pi}{2}, w_2 = \frac{\pi}{2}}$$

ולכן –

$$I = \frac{\pi}{2}\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{7\pi}{2}$$

■

<u>תרגיל:</u>

קרב את האינטגרל הבא באמצעות 2 נקודות דגימה.

$$\int_0^1 f(x) * x^{-\frac{1}{2}} dx$$

<u>פתרון:</u>

נרצה –

$$\int_0^1 f(x) * x^{-\frac{1}{2}} dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

הרעיון של השאלה למצוא פולינום אורתוגונלי מדרגה 2, כאשר האורתוגונליות ביחס לפונקציית המשקולת $x^{-\frac{1}{2}}$ בקטע $[0,1]$.

בניית משפחה אורתוגונלית באמצעות נוסחה רקורסיבית.

$$\boxed{P_{n+1}(x) = (x - B_n)P_n(x) - c_n * P_{n-1}(x)}$$

ובוחרים $P_0 = 1$, $P_1(x) = (x - B_0)P_0(x)$.

כאשר נקבל מגראם-שמידט את -

$$B_n = \frac{< xP_n, P_n >}{< P_n, P_n >} \ , c_n = \frac{< xP_n, P_{n-1} >}{< P_{n-1}, P_{n-1} >}$$

כעת –

$$P_0 = 1$$

$$=> \ P_1(x) = (x - B_0) * 1 \ \ , B_0 = \frac{< x, 1 >}{< 1,1 >}$$

לכן –

$$B_0 = \frac{\int_0^1 x * 1 * \frac{1}{\sqrt{x}} dx}{\int_0^1 1 * 1 * \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = \frac{\int_0^1 \sqrt{x} dx}{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = \frac{1}{3}$$

ולכן –

$$P_0(x) = x - \frac{1}{3}$$

נחשב את הפונקציה הבאה –

$$P_2(x) = (x - B_1) * P_1(x) + c_1 * P_0(x)$$

לכן –

$$B_1 = \frac{< xP_1, P_1 >}{< P_1, P_1 >} = \frac{\int_0^1 x * \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 * \frac{1}{\sqrt{x}} dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 * \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = \frac{11}{21}$$

$$c_1 = \frac{< xP_1, P_0 >}{< P_0, P_0 >} = \frac{\int_0^1 x * \left(x - \frac{1}{3}\right) * 1 * \frac{1}{\sqrt{x}} dx}{\int_0^1 1 * 1 * \frac{1}{\sqrt{x}} dx} = \frac{4}{45}$$

ולכן –

$$\boxed{P_2(x) = x^2 - \frac{6}{7}x + \frac{3}{35}}$$

x_1, x_2 יהיו השורשים של הפולינום $P_2(x)$ ונקבל שהם –

$$\boxed{x_1 = 0.7416 \ , x_2 = 0.1156}$$

ולכן -

$$=> \int_0^1 f(x) * \frac{1}{\sqrt{x}} dx \approx w_1 f(0.1156) + w_2 f(0.7416)$$

הסכימה מדויקת על פולינומים. לכן ניקח תחילה $f(x) = 1$ ונקבל –

$$\int_0^1 1 * \frac{1}{\sqrt{x}} dx = w_1 * 1 + w_2 * 1$$

וכעת ניקח $f(x) = x - \frac{1}{3}$ ונקבל –

$$\underbrace{\int_0^1 1 * \left(x - \frac{1}{3}\right) * x^{-\frac{1}{2}} dx}_{\text{שווה ל}-0} = w_1 * \left(0.1156 - \frac{1}{3}\right) + w_2 * \left(0.7416 - \frac{1}{3}\right)$$

ולכן נקבל את מערכת המשוואות הבאה –

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 \\ w_1 \left(0.1156 - \frac{1}{3}\right) + w_2 \left(0.7416 - \frac{1}{3}\right) = 0 \end{cases}$$

ונקבל ש –

$$w_1 = 0.696\,, w_2 = 1.304$$

ולכן בסה"כ –

$$\boxed{\int_0^1 f(x) * x^{-\frac{1}{2}} dx \approx 0.696 * f(0.1156) + 1.304 * f(0.7416)}$$

<u>הערה:</u>

1) שיטת סימפסון לא תעבוד כאן מאחר ויש נקודה סינגולרית ב - $x = 0$.

2) ניקח לדוגמה את $f(x) = \cos(x)$ ועבור התרגיל הקודם נקבל –

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}} dx \approx 0.696 * \cos(0.1156) + 1.304 * \cos(0.7416)$$

כאשר החישוב הוא **<u>ברדיאנים</u>**!!!

תרגול השלמה

30 אוגוסט, 2016

תזכורת למשפטים:

1) בתרבוע גאוס:

N – דרגת דיוק אלגברית.

n – דרגת קירוב. מספר הנקודות שנלקחו!

מתקיים –

$$N = 2n - 1$$

2) הסכימה תהיה מדויקת על פולינומים ממעלה $2n + 1$, בהינתן שנלקחו $n + 1$ נקודות.

<u>למשל</u> – בתרגיל הקודם נלקחו 2 נקודות דגימה, כלומר –

$$n + 1 = 2 \;\; => \;\; n = 1$$

ולכן הסכימה תהיה מדויקת עבור פולינומים ממעלה $2n + 1 = 3$.

דוגמה:

$n = 2$ <= בונים פולינום מדרגה שנייה.

x_1, x_2 הם יהיו השורשים של הפולינום האורתוגונלי שנמצא.

מהי דרגת הקירוב האלגברית?

$$N = 2n - 1 \;\; => \;\; N = 3$$

אם $n = 2$ אז מעלת הפולינומים כדי שהסכימה תהיה מדויקת הינה 3.

תרגיל מספר 61 בלקט תרגילים שנמצא באתר:

נתונה הפונקציה –

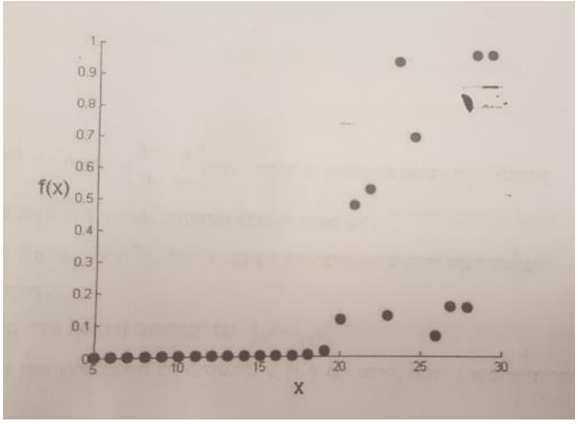
$$f(x) = |\sin(3.141592 \ldots 213 * 5^x)| \approx \sin(5^x\pi) = \sin(n\pi)$$

(18 ספרות של π) **<u>עבור x</u>** שלם בטווח $x \in [5,30]$.

א) מהם הערכים של הפונקציה שצריכים להתקבל? מה החישוב האנליטי עבור ערכי x הנתונים?

ב) נתון הגרף הבא –

מדוע התקבל הגרף בצורה הנ"ל? הסבירו את תשובתכם עפ"י של $C.N$ של הפו' $\sin(x)$.



פתרון:

א) ידוע ש - $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ לכל ערכי x. אבל בגלל ערך מוחלט נקבל –

$$0 \leq |\sin(x)| \leq 1$$

■

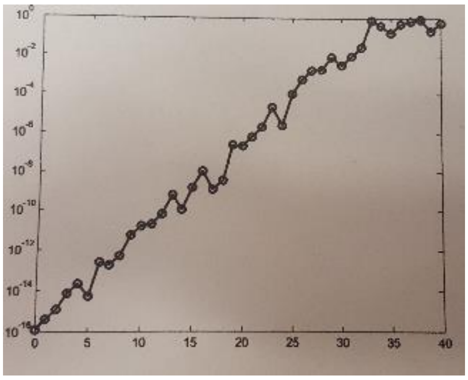
ב) נחשב את $C.N$ של $\sin(x)$:

$$C.N(x) = \frac{|f'(x)| * |x|}{|y|} = \frac{|\cos(x)| * |x|}{|\sin(x)|} = |x * \cot(x)|$$

לפיכך –

$$\lim_{x \to \pi} |xcot(x)| = \infty$$

כלומר הפונקציה רגישה מאוד לטעות. לכן ככל שערכו המקורב של $n\pi$ מתרחק מערכו האמיתי (כלומר כאשר מגדילים את ערך החזקה) קיבלנו תוצאה מדויקת פחות, במקרה שלנו רחוקה מ – n.



■

תרגיל מספר 4 מהלקט (גזירה נומרית):

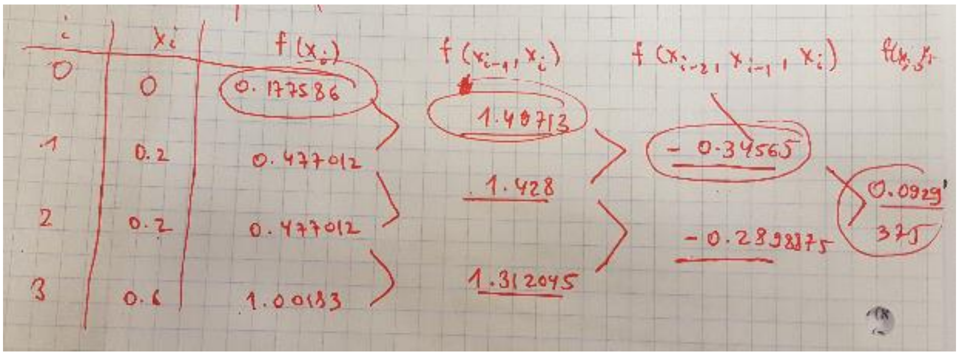
נתונים הערכים –

	0	0.2	0.6
$f(x)$	0.177586	0.477012	1.00183
$f'(x)$	-----	1.4280	-----

א) מצא פולינום אינטרפולציה המקיים את נתוני הטבלה והעריכו את הנגזרת הראשונה בנקודה $x = 0.4$.

פתרון:

נבנה טבלה –



(המספר של 1.4280 מגיע בגלל שאם עושים את החיסור הרגיל נקבל $\frac{0}{0}$ ואז נבצע לופיטל כדי לקבל את $f'(0.2)$ שזהו הערך המצוין).

לכן –

$$P_2(x) = 0.177586 + 1.49713 * (x - 0) - 0.34565(x - 0)(x - 0.2) + 0.0929375(x - 0)(x - 0.2)^2$$

וכעת נותר לגזור ולהציב - $x = 0.4$.

■