

תרגיל 4

1. הוכיחו שהחוגים הבאים איזומורפיים:

(א)

$$R = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$$

(ב)

$$R = \mathbb{C}[x,y]/\langle xy-1 \rangle, \quad S = \mathbb{C}[x,y]/\langle x^2+y^2-1 \rangle$$

2. הוכיחו שהחוגים הבאים אינם איזומורפיים:

$$R = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 \rangle, \quad S = \mathbb{Q}[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$$

3. הוכיחו: $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]/5\mathbb{Z}[\frac{1}{3}] \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

4. קבעו האם החוגים הבאים הם שדות. נמקו את קביעתכם.

$$\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 1 \rangle \quad (\text{א})$$

$$\mathbb{Z}_3[x]/\langle x^2 + 2 \rangle \quad (\text{ב})$$

5. יהי $\varphi: R \rightarrow S$ הומומורפיזם של חוגים ו- $I \trianglelefteq S$ אידיאל מקסימלי. הוכיחו/הפריכו:
 $\varphi^{-1}(I)$ אידיאל מקסימלי של R .

6. תנו דוגמה לחוגים R, S , אפימורפיזם $\varphi: R \rightarrow S$ ואידיאל מקסימלי $I \trianglelefteq R$ אידיאל מקסימלי, כך ש- $\varphi(I) = S$.