פתרון תרגיל 6 – מבוא לאנליזה 1

1. נוכיח שהסדרה $a_n = \frac{1}{3n}$ היא סדרת קושי:

צ"ל שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - a_m| < \varepsilon$, כלומר $\left|\frac{1}{3n} - \frac{1}{3m}\right| < \varepsilon$.

נשים לב ש

$$\left|\frac{1}{3n} - \frac{1}{3m}\right| \leq \frac{1}{3n} + \frac{1}{3m} \leq \frac{1}{3n_0} + \frac{1}{3n_0} = \frac{2}{3n_0}$$

ולכן נרצה $\frac{2}{3n_0} < \varepsilon$, כלומר $n_0 > \frac{2}{3\varepsilon}$.

פורמלית: בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $n_0 = \lceil \frac{2}{3\varepsilon} \rceil \in \mathbb{N}$, ואז לכל $m, n \geq n_0$ יתקיים

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{3n} - \frac{1}{3m}\right| \leq \frac{1}{3n} + \frac{1}{3m} \leq \frac{1}{3n_0} + \frac{1}{3n_0} =$$

$$= \frac{2}{3n_0} = \frac{2}{3 \cdot \lceil \frac{2}{3\varepsilon} \rceil} \leq \frac{2}{3 \cdot \frac{2}{3\varepsilon}} = \varepsilon$$

כדרוש.

2. נתונה הסדרה $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

(א) צ"ל שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$. נשים לב:

$$a_{2n} - a_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}}_{n\ times} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

כלומר $a_{2n} - a_n \geq \frac{1}{2}$, כדרוש.

(ב) נניח בשלילה ש־$\{a_n\}$ מקיימת את קריטריון קושי ונגיע לסתירה. אם כך, בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{2}$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n \geq n_0$ מתקיים $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}$. בפרט עבור $n \geq n_0$ טבעי ו־$m = 2n$: $\boldsymbol{|a_{2n} - a_n| < \frac{1}{2}}$, בסתירה לסעיף (א).

(ג) קל להוכיח ש־$\{a_n\}$ מונוטונית עולה ממש ע"י חישוב ההפרש:

$$a_{n+1}-a_n=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}>0$$

ולכן $\boldsymbol{a_{n+1}>a_n}$, כלומר הסדרה מונוטונית עולה. לפי משפט שלמדנו, זה אומר ש־$\{a_n\}$ מתכנסת במובן הרחב – לגבול סופי או ל־∞. לפי סעיף (ב) $\{a_n\}$ אינה סדרת קושי ולכן היא לא מתכנסת לגבול סופי. לכן $a_n \nearrow \infty$.

3. הוכיחו בעזרת הגדרת הגבול עפ"י קושי (כלומר בלשון $\varepsilon-\delta$):

(א) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x-1}{2}=3$

בהינתן $\varepsilon>0$ נרצה למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-7|<\delta$ אז $\left|\frac{x-1}{2}-3\right|<\varepsilon$.

נבחר $\delta=2\varepsilon$, ואז אם $0<|x-7|<\delta$ יתקיים

$$\left|\frac{x-1}{2}-3\right|=\left|\frac{x-7}{2}\right|=\frac{|x-7|}{2}<\frac{\delta}{2}=\frac{2\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כדרוש.

(ב) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3x-1}=0$

בהינתן $\varepsilon>0$ נרצה למצוא $M>0$ כך שלכל $x>M$ יתקיים $\left|\frac{2}{3x-1}-0\right|<\varepsilon$.

ניקח $M=\frac{1}{3}+\frac{2}{3\varepsilon}$, ואז לכל $x>M$ מתקיים

$$x>\frac{1}{3}+\frac{2}{3\varepsilon}\ \Rightarrow\ 3x>1+\frac{2}{\varepsilon}\ \Rightarrow\ 3x-1>\frac{2}{\varepsilon}$$

ולכן גם

$$\left|\frac{2}{3x-1}-0\right|=\frac{2}{3x-1}<\frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}}=\varepsilon$$

כדרוש.

(ג) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{(x-1)^2}=\infty$

בהינתן $M>0$ נרצה למצוא $\delta>0$ כך שאם $0<|x-1|<\delta$ אז $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}>M$.

נבחר $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$, ואז אם $0<|x-1|<\delta$ יתקיים

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2}\geq\frac{1}{|x-1|^2}>\frac{1}{\delta^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right)^2}=M$$

כדרוש.

(ד) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}=\infty$

בהינתן $M>0$ נרצה למצוא $\delta>0$ כך שאם $x>\delta$ אז $\sqrt{x}>M$.

נבחר $\delta=M^2$, ואז אם $x>\delta$ יתקיים

$$\sqrt{x}>\sqrt{\delta}=\sqrt{M^2}=M$$

כדרוש.