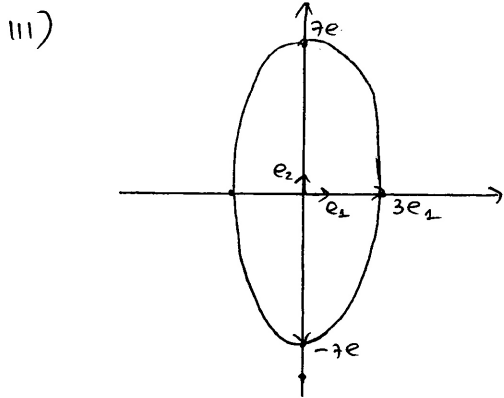


תשובות - 3 תרגולים 1

a) i) $3x_1^2 - 7x_2^2 = (x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X^T \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} X$

ii) המטריצה אנכסונית ולכן איברי האנכסון הם הערך ווקטורי העיסים e_1 ו e_2 הם הווקטורים העצמיים.

$\lambda_1 = 3 \Leftrightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -7 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

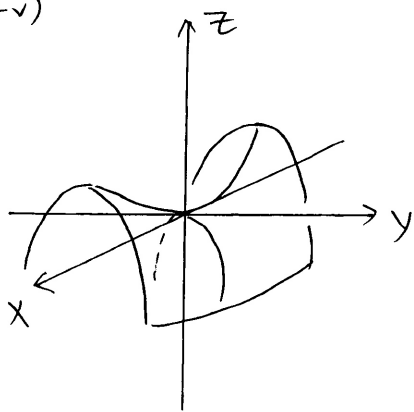


תמונת מעגל היחידה S^1 תחת $v \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} v$ היא אליפסה

iv) + v)

המטריצה נכרך מאוכסנת $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

vi)

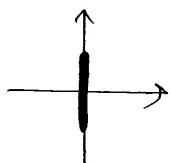


פרבולויד היפרבולי
 $= 3x_1^2 - 7x_2^2$

b) i) $-5x_2^2 = X^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} X$

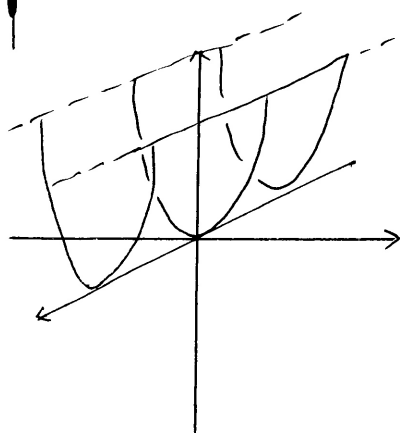
ii) $\lambda_1 = 0 \Leftrightarrow v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = -5 \Leftrightarrow v_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

iii)



תמונת מעגל היחידה תחת ההצטקה הוא הקטע $[-5, 5]$ על ציר ה-y.

vi)



$x_3 = -5x_2^2$

$$c) 1) 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 6x_2^2 = x^T \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} x$$

$$1) \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 6-\lambda \end{pmatrix} \right| = (3-\lambda)(6-\lambda) - (-2)(-2) = 18 - 9\lambda + \lambda^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

$$(\lambda - 7)(\lambda - 2) = 0$$

פונקציה
אופיינית

$$\lambda_1 = 7 \quad \lambda_2 = 2$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2x - y = 0$$

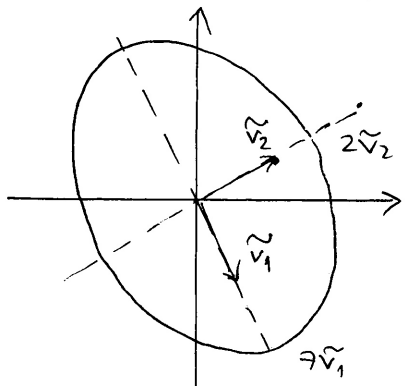
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} x = 0$$

$$x - 2y = 0$$

$$\tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \leftarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

iii)



תמונת מעגל היחידה היא אליפסה.

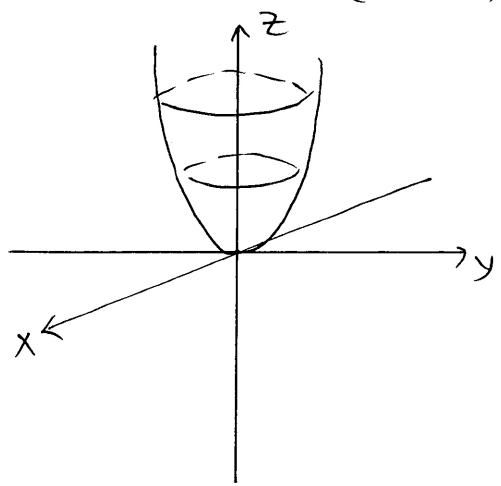
$$iv) P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \quad P^T = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^T$$

$$v) \tilde{x} = P^T x \quad \text{שינוי משתנים}$$

$$x^T A x = x^T P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^T x = \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tilde{x} = 7\tilde{x}_1^2 + 2\tilde{x}_2^2$$

iv)

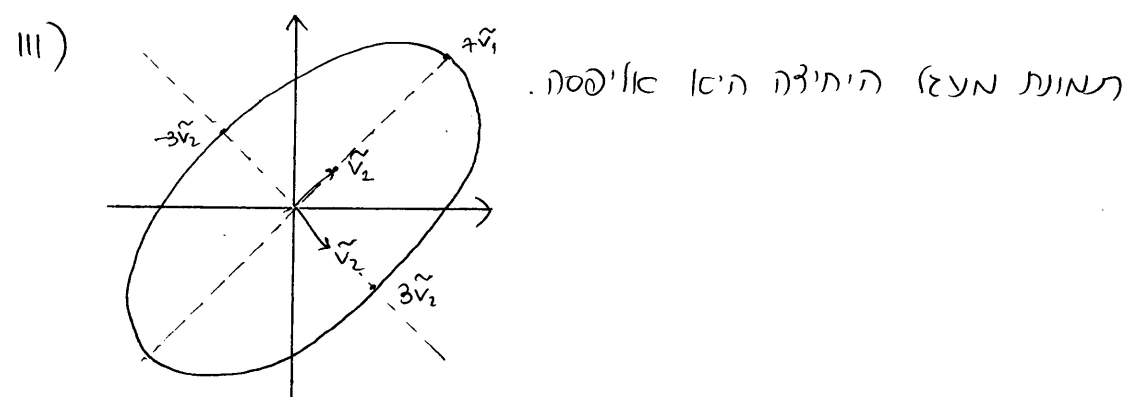


d) 1) $2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2 = x^T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} x$

ii) $\left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 25 = \lambda^2 - 4\lambda - 21 = (\lambda - 7)(\lambda + 3) = 0$

$\lambda_1 = 7$
 \downarrow
 $\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} x = 0$
 $-x + y = 0$
 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

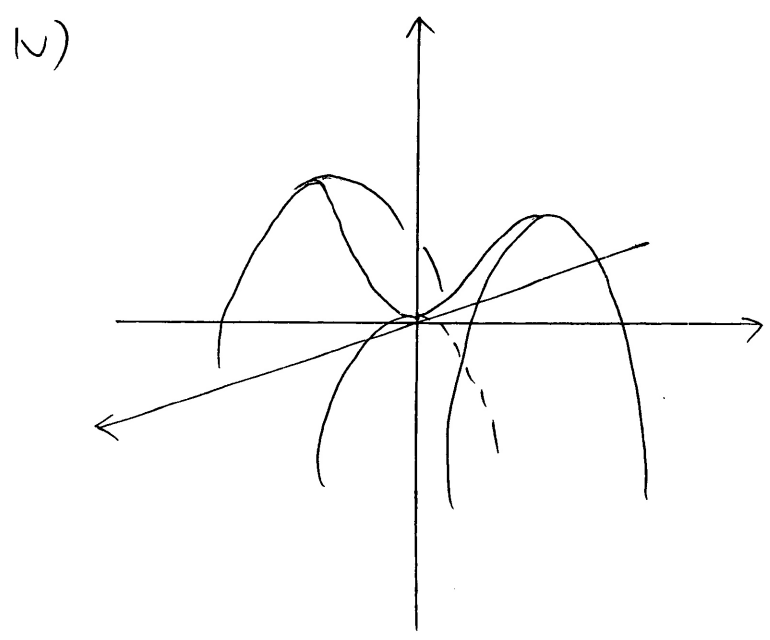
$\lambda_2 = -3$
 \downarrow
 $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} x = 0$
 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



iv) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad P^T = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^T$

v) $x^T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} x = x^T P \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} P^T x = \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} x$
 $\tilde{x} = Px$: פוטנציאל מוארך



e) 1) $Q(x) = x_1^2 - 6x_1x_2 + 9x_2^2 = x^T \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} x$

ii) $\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ -3 & 9-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 10\lambda = 0$

$\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 10$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} x = 0$

$x_1 - 3x_2 = 0$

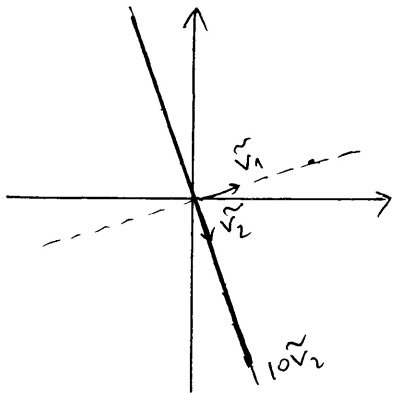
$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} x = 0$

$-3x_1 - x_2 = 0$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

iii)



תמונת מעגל היחידה היא הקטע שבין

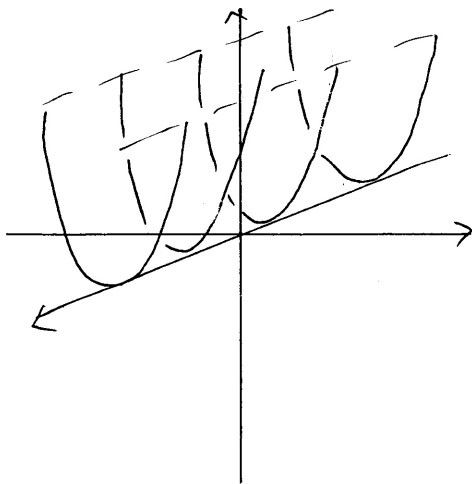
הנקודות $(\sqrt{10}, -3\sqrt{10})$ ו- $(-\sqrt{10}, 3\sqrt{10})$

iv) $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} P^T$

v) $Q(x) = x^T P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} P^T x = \tilde{x}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \tilde{x} = 10\tilde{x}_2^2$
 $\tilde{x} = Px$

vi)



2. $Q(x) = x^T \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x$

הערבים העצמיים הם $\lambda_1 = 5$ $\lambda_2 = -2$ ← צטוו ווקטורי יחידה הערך התיקוני' שמתקבל בתבנית הריבועית שווה לערך העצמי הגמור כי"תו $\in 5$

3. $Q(x) = x^T \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} x$

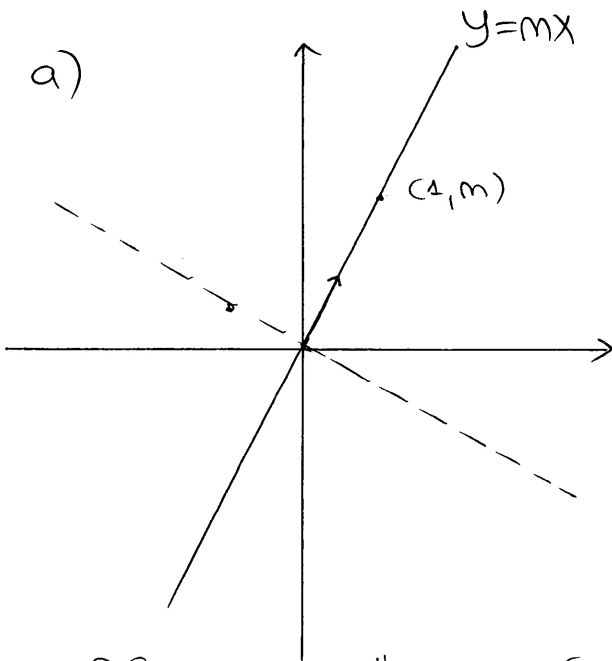
ע"פ שיקול צומתו צתנוזול קוצם (מצא) ערטים עצמיים אנסו ציה

$$\left| \begin{pmatrix} \lambda-7 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 10\lambda + 21 - 1 = \lambda^2 - 10\lambda + 20$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 20}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{20}}{2}$$

הערק העצמי הגמור כי"תו והערק התיקוני' שמתבנית הריבועית מתקבל $\in 5 + \sqrt{5}$

4. a)



ווקטורים ככיוון הישו $y=mx$ זא נשנים אורכס או כיוונם תחת ההצתקה \downarrow

$\lambda_1 = 1$ מתאים לערק עצמי ווקטור יחידה ככיוון זה

$$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

ככיוון התאונק אישו $y=mx$ הווקטורים משנים אז כיוונם אר זא אז אורכס \downarrow

מתאים ערק עצמי $\lambda_2 = -1$

ווקטור היחידה ככיוון זה תוא הוקטור המתקבל v_2 ע"י סיבוב 90° :

$$\left(-\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \right)$$

b) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ הצורה המתוכנסת A ל D

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & -\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \\ \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \end{pmatrix} \quad P^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} & \frac{m}{\sqrt{1+m^2}} \\ -\frac{m}{\sqrt{1+m^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \end{pmatrix}$$

$$A = PDP^T = \begin{pmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & 1 \end{pmatrix}$$

c) פרבולויד היפרבולי