הרצאה X- אינפי 1

הערה לגבי מבחן קושי: אפשר להכליל את משפט קושי למבחן הבא:

<u>משפט</u>: אם יש לנו טור חיובי, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, נסמן $K_n = q$ = $\lim sup\sqrt[n]{a_n}$. אזי:

1. $q<1$ אזי הטור מתכנס
2. $q>1$ אזי הטור מתבדר

הוכחה: נתחיל מ2. נבחר $1 < q' < q$. נגדיר $L_n = sup\{K_n, K_{n+1}, \dots\}$ וסדרה זו שואפת לq. מתקיים $\exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n} : 1 < q' < L_n$ ולכן $\exists K_{m_n} : 1 < K_{m_n}$ ואז ע״פ הגדרת המבחן (או סדרה) מתקבל $a_{m_n} > 1$. לכם האיבר הכללי אינו שואף לאפס, ולכן הטור מתבדר.

נעבור ל1. נבחר $q < q' < 1$. בדרך דומה נקבל כי מתקיים $a_n < (q')^n$, הצד הימני מתכנס, ולכן גם הטור.

תרגילים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = +\infty$ כי האיבר הכללי שואף ל$\frac{1}{e} \neq 0$, ולכן מתבדר ע״פ קושי.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} < \infty$, נוכיח ע״י חישוב $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \dots = \frac{1}{e} < 1$.

<u>התכנסות בהחלט:</u>

הגדרה: אומרים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם גם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

<u>משפט</u>: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אזי הוא מתכנס.

הוכחה: ע״פ קירטריון קושי נקבל $\forall \varepsilon > 0 : \ |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon$ ומתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, לכן תנאי קושי מתקיים, ולכן $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \forall n \geq \bar{n}: |a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$ וע״פ הגדרה מתקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sin2^n}{n^2}$. נבדוק אם $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{sin2^n}{n^2}\right|$ מתכנס. הטור מתכנס בהחלט כי $\left|\frac{sin2^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} < \infty$ וע״פ משפט קיבלנו את הדרוש.

נכליל ונקבל כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: כך ש $|a_n| \leq \alpha_n$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט.

<u>מבחנים מיוחדים</u>:

לוגריתמי: $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\frac{1}{|a_n|}}{\ln n} = \alpha$. אם $1>\alpha$ לא מתכנס בהחלט. ואם $1<\alpha$ מתכנס בהחלט.

דלאמבר: $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = q$. q<1 מתכנס בהחלט. אם q>1 לא מתכנס בהחלט.

קושי: $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$. q<1 מתכנס בהחלט. אם q>1 לא מתכנס בהחלט.

<u>התכנסות על תנאי:</u>

<u>הגדרה</u>: אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל לא בהחלט אזי הטור מתכנס כל תנאי. ז״א, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אבל $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ מתכנס על תנאי. זה נקרא הטור של לייבניץ, Leibnitz.

<u>משפט Leibnitz</u>: יהי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ (c). כאשר c_n חיובית ויורדת מונוטונית. אזי הטור C מתכנס.

הוכחה: $S_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}c_k$.

ונקבל $S_{2m} = C_1 - C_2 + C_3 - \cdots - C_{2m} = C_1 - (C_2 - C_3) - \cdots - (C_{2m-2} - C_{2m-1}) - C_{2m}$.

מתקיים $S_{2m+2} = S_{2m} + \underbrace{C_{2m+1} - C_{2m+2}}_{\geq 0}$. מכאן ש $S_{2m} \nearrow$. ומתקיים כי $S_{2m} < C_1$. לכן קיים הגבול $S \coloneqq \lim_{n\to\infty} S_{2m}$. נראה בדרך דומה כי גם עבור האי זוגיים הדבר מתקיים, ונקבל כי ע"פ משפט קיים גבול ל$S_n = S$, והוכחנו את הדרוש, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ מתכנס! (וברור כי $S \leq C_1$).

מסקנה: הי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ (c). כאשר c_n חיובית ויורדת מונוטונית. אזי $\left|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^{k-1}c_k \leq C_n\right|$.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ כאשר α ממשי. מצא לאיזה α הטור מתכנס, מתכנס בהחלט, מתבדר, ומתכנס על תנאי.

פתרון: התכנסות בהחלט: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$- מתכנס אם α גדול מאחד. מתבדר אם $\alpha \leq 1$. ז"א שעבור $\alpha > 1$ A מתכנס בהחלט, וכמו כן עבור $0 < \alpha \leq 1$ לא מתכנס בהחלט. עבור $\alpha > 0$ אפשר לראות שלפי המשפט של לייבניטץ מתכנס על תנאי אם $\alpha > 0$. ואם $\alpha \leq 0$ התנאי ההכרח לא מתקיים.

לסיכום: $\alpha>1$ מתכנס בהחלט
$0<\alpha\leq1$ מתכנס על תנאי . פתרנו ☺
$\alpha\leq0$ מתבדר

<u>מבחנים של התכנסות (על תנאי): של *Dirichlet & Abel*</u>

<u>משפט</u>: (מבחן דיריכלה). יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$. נניח ש:

א. סכומים חלקיים של $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ חסומים. ז"א ש$\exists C \geq 0\ \forall n: \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right| \leq C$
ב. $b_n \searrow \to 0$ (יורדת מונוטונית ושואפת לאפס).

ואז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ מתכנס.

דוגמא: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$. מתקיימים התנאים כי הסכומים החלקיים של $(-1)^{n-1}$ אי שליליים וc_n שואף לאפס, ויורד מונוטוני.

הוכחה: נוכיח בעזרת קריטריון קושי. $\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k b_k$.

<u>התמרת אבל</u>: $A_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n}a_k$ ונתון כי $|A_n| \leq C$. ע"פ ההגדרה מתקיים $a_k = A_k - A_{k-1}$.

כעת נגדיר: $T_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p}(A_k - A_{k-1})b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p}A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p}A_{k-1}b_k$, והפעם נציב *k-1=m*.

נקבל $= \sum_{k=n+1}^{n+p}A_k b_k - \sum_{m=n}^{n+p-1}A_m b_{m+1} = A_{n+p}b_{n+p} - A_n b_{n+1} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1}A_k(b_k - b_{k+1})$ וזוהי בדיוק התמרת אבל.

כעת נקבע $\varepsilon > 0$. ונקבל ע"פ אי השיוויון המשולש כי מתקיים $\left|T_{n,p}\right| \leq \underbrace{|A_{n+p}||b_{n+p}|}_{\leq C|b_{n+p}|} + \underbrace{|A_n||b_{n+1}|}_{\leq C|b_{n+1}|} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|A_k||b_k - b_{k+1}|}_{\leq C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1})}$.

ולכן מתקיים $\left|T_{n,p}\right| \leq C\left(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|\right) + C\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k - b_{k+1}) \leq 2C\left(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|\right)$. ואז קיבלנו אחרי כל הפיתוח המפרך כי $\left|T_{n,p}\right| \leq 2C\left(|b_{n+p}| + |b_{n+1}|\right)$. ובגלל ש$b_n \to 0$ מתקיים כי $|b_n| \leq \frac{\varepsilon}{4C}$ $\exists\bar{n}\ \forall n \geq \bar{n}:$. משל.

<u>משפט</u> : (מבחן של Abel). יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ כך ש :

א. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

ב. b_n מונוטוני וחסומה.

אזי הטור מתכנס.

הוכחה : b_n מונוטוני וחסומה, לכן קיים גבול לb_n. נקרא לגבול זה L. נסמן : $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. לכן מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - L + L) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n (b_n - L)}_{\text{מתכנס ע"פ דריכלה}} + L \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{\text{מתכנס לפי תנאי}}$, הראנו את התכנסותם לפי מבחן דריכלה, וסכום של טורים מתכנסים הוא טור מתכנס. משל.