תרגיל 5

1. יהא X מ"ט ו A תמ"ט. הוכיחו כי S סגורה ב A אם קיימת סגורה S' ב X כך ש $S = A \cap S'$.

<u>פתרון:</u>

תהא S סגורה ב A אזי $A \backslash S$ פתוחה ב A. לכן קיימת O פתוחה ב X כך ש $A \backslash S = A \cap O$ נגדיר $S' = X \backslash O$ סגורה ב X והיא תקיים

$$A = A \cap X = A \cap (S' \uplus O) = (A \cap S') \uplus (A \cap O) = (A \cap S') \uplus (A \backslash S)$$

ולכן $S = A \cap S'$.

2. הוכיחו ש־(X, τ_{cof}) תמיד ספרבילית. בנוסף, מצאו מתי (X, τ_{coc}) ספרבילית.

<u>פתרון:</u>

נראה שכל קבוצה בת מניה אינסופית צפופה ב־X. אכן, תהי $A \subseteq X$ אינסופית בת מניה. אנחנו טוענים ש־$cl(A) = X$. אכן, יהי $x \in X$ ותהי $x \in U \in \tau_{cof}$ סביבה של x. לפי הגדרה, $|U^c| < \infty$ ולכן $A \nsubseteq U^c$ כי אחרת

$$\aleph_0 = |A| \leq |U^c| < \infty$$

מה שלא אפשרי. מכאן, $A \cap U \neq \emptyset$. זה נכון לכל $x \in X$ וכל סביבה U של x ולכן A צפופה לפי הגדרה.

מנגד, (X, τ_{coc}) ספרבילית אם ורק אם X בת מניה. יותר מזה, אם X לא בת מניה אז קל לראות שכל תת קבוצה בת מניה שלה היא סגורה (כי המשלים שלה פתוח לפי הגדרה).

3. תהי $(P, <)$ קבוצה סדורה לינארית עם טופולוגיית הסדר. הוכיחו את משפט הסנדוויץ: אם $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq P$ סדרות כך ש

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq y_n \leq z_n$$

וגם

$$L := \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} z_n$$

אז מתקיים ש־$\lim_{n \in \mathbb{N}} y_n = L$.

<u>בונוס:</u> נסחו טענה דומה על רציפות פונקציות והוכיחו אותה.

<u>פתרון:</u>

תהי $L \in U \in \tau_<$ סביבה. לפי הגדרה, קיימים $a < L < b$ כך ש־$(a, b) \subseteq U$. מכיוון ש־$L := \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \in \mathbb{N}} z_n$, קיימים $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ כך ש

$$\forall n_0 \leq n \in \mathbb{N} : x_n \in (a, b),$$

$$\forall m_0 \leq m \in \mathbb{N} : z_n \in (a,b)$$

נגדיר $t_0 := \min\{n_0, m_0\}$. לכל $t_0 \leq t \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־$t \geq n_0, m_0$ ולכן $x_t, z_t \in (a,b)$. מכאן קל לראות ש

$$y_t \geq x_t > a,\ \ y_t \leq z_t < b$$

לפי הגדרה, $y_t \in (a,b)$ ולכן $\lim_{n\in\mathbb{N}} y_n = L$ כדרוש.

<u>בונוס:</u> יהי (X,τ) מרחב טופולוגי ו־$(P,<)$ קבוצה לינארית עם טופולוגיית הסדר. נניח ש־$f,g,h : X \to P$ כך ש־$f \leq g \leq h$. לבסוף נניח בנוסף ש־$f(x_0) = h(x_0)$ וש־f,h רציפות ב־x_0. הוכיחו שגם g רציפה ב־x_0.

<u>הוכחת הבונוס:</u> תהי $x_0 \in U \in \tau_<$. לפי הגדרה, קיימים $a < x_0 < b$ כך ש־$(a,b) \subseteq U$. מכיוון ש־f,h רציפות ב־x_0, קיימות $x_0 \in V_1, V_2 \in \tau$ כך ש־$f(V_1), h(V_2) \subseteq (a,b)$. נגדיר כעת $V := V_1 \cap V_2$. אם $y \in V$, אז $f(y), h(y) \in (a,b)$ ולכן

$$g(y) \leq h(y) < b,\ \ g(y) \geq f(y) > a$$

ולכן $g(y) \in (a,b)$. זה נכון לכל $y \in V$, כלומר $g(V) \subseteq (a,b)$. לפי הגדרה, g רציפה ב־x_0.

4. יהיו (X,d) ו־(Y,ρ) שני מרחבים מטריים ותהיה $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ פונקציה על. נניח גם שקיימים $m < M \in \mathbb{R}^{>0}$ כך ש־

$$\forall x,y \in X : md(x,y) \leq \rho(f(x), f(y)) \leq Md(x,y)$$

הוכיחו ש־f היא הומאומורפיזם.
<u>פתרון:</u>

ראשית, קל לראות ש־f היא חח"ע, כי אם $x,y \in X$ ו־$f(x) = f(y)$ אז מתקיים

$$d(x,y) \leq \frac{1}{m}\rho(f(x), f(y)) = 0 \Rightarrow x = y$$

לכן, f היא הפיכה. בנוסף, קל לראות ש־f היא ליפשיץ עם מקדם M. אנחנו טוענים ש־f^{-1} היא ליפשיץ גם כן עם מקדם $\frac{1}{m}$. יהיו $\alpha, \beta \in Y$ ונניח ש־$f(x) = \alpha, f(y) = \beta$. נתון ש־

$$md(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)) = md(x,y) \leq \rho(f(x), f(y)) = \rho(\alpha,\beta) \Rightarrow$$

$$d(f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)) \leq \frac{1}{m}\rho(\alpha,\beta)$$

אנחנו יודעים שפונקציות ליפשיץ הן רציפות ולכן הראנו ש־f ו־f^{-1} הן רציפות, כרצוי.

5. תהא $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \{2\}\}$ טופלוגיה על $\mathbb{R}$. נגדיר $f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ שמוגדרת על ידי $f(x) = 2x$. מצאו באלו נקודות f רציפה.
<u>פתרון:</u>

עבור כל $y \neq 2$, הסביבה היחידה של y היא $\mathbb{R}$ ולכן הפונקציה רציפה בהן. עבור $y = 2$ ישנה גם $U = \{2\}$ ומתקיים $f^{-1}(U) = \{1\} \notin \tau$. לכן הפונקציה רציפה בכל נקודה חוץ מ־2.

6. מצאו τ על $\mathbb{R}$ כך שחיבור של רציפות $f, g : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ אינה רציפה.
<u>פתרון:</u>

בטופולוגיה של הסעיף הקודם, אפשר להסתכל על $f(x) := x$ (כלומר, פונקציית הזהות).

7. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, ותהי $A \subseteq X$. נגדיר את $1_A : X \to \{0,1\}$ לפי

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(א) הוכיחו ש־$X \setminus \partial(A) = int(A) \cup int(A^c)$

(ב) הוכיחו ש־1_A רציפה בדיוק ב־$X \setminus \partial(A)$

(ג) הסיקו ש־1_A רציפה אם ורק אם A היא סגוחה.
<u>פתרון:</u>
ראשית נראה שאכן

$$X \setminus \partial(A) = int(A) \cup int(A^c)$$

קל לראות ש־

$$X \setminus \partial(A) = \Big(A \setminus \partial(A)\Big) \cup \Big(A^c \setminus \partial(A)\Big)$$

ראינו בהרצאה ש־$int(A) = A \setminus \partial(A)$ ולכן גם $int(A^c) = A^c \setminus \partial(A)$, מה שמסיים את ההוכחה. נוכיח את הפרט הזה שוב לנוחות הקורא. לפי הגדרת השפה, מתקיים

$$A \setminus \partial(A) = A \setminus (\overline{A} \setminus A^\circ) = (A \setminus \overline{A}) \cup A^\circ = A^\circ$$

שימו לב שהשיוויון האחרון מתקיים כי $A \subseteq \overline{A}$ והאחד שלפניו בזכות זה ש־$A^\circ \subseteq \overline{A}$.
כעת, נראה ש־1_A אכן רציפה ב־A° וגם ב־$(A^c)^\circ$. יהי $x \in A^\circ$. נשים לב ש־A° היא פתוחה ולכן מהווה סביבה פתוחה של x. בנוסף, $A^\circ \subseteq A$ ולכן $1_A(A^\circ) \equiv 1$. הסביבה המינימלית של $1 \in Im(1_A)$ היא $\{1\}$ וקל לראות ש־

$$x \in A^\circ \subseteq 1_A^{-1}(\{1\})$$

הטיעון ל־$(A^c)^\circ$ דומה ולכן 1_A רציפה על $X \setminus \partial(A) = int(A) \cup int(A^c)$.
מנגד, נניח ש־$x \in X$ כך ש־1_A רציפה ב־x. נסתכל על הסביבה $U := \{1_A(x)\}$. לפי תכונות פונקציה רציפה, מתקיים ש־$1_A^{-1}(U)$ קבוצה פתוחה שמכילה את

x. בנוסף, $1_A^{-1}(U) \subseteq A$ או $1_A^{-1}(U) \subseteq A^c$. מכיוון שהפנים הוא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר בתוך קבוצה נתונה, מתקיים ש־$1_A^{-1}(U) \subseteq A^\circ$ או $1_A^{-1}(U) \subseteq (A^c)^\circ$, כרצוי.

לבסוף, כתוצאה מהסעיף הקודם ברור ש־1_A רציפה אם ורק אם $\partial(A) = \emptyset$. כלומר:

$$\partial(A) = \overline{A} \setminus A^\circ = \emptyset$$

ראינו בהרצאה ש־$A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$ ולכן בהכרח $\overline{A} = A = A^\circ$. לפי עוד תוצאה מההרצאה, A פתוחה וגם סגורה, כרצוי.

8. נניח ש־$(P,<), (Q,\prec)$ הן קבוצה סדורה לינארית ונסתכל על טופולוגיית הסדר. נניח בנוסף ש־$f : P \to Q$ הינה פונקציה מונוטונית.

(א) הוכיחו או הפריכו שקבוצת נקודות אי הרציפות של f היא דלילה.

(ב) האם תשובתכם תשתנה אם $(Q,\prec) = ([0,1],<)$?

פתרון:

הסעיף הראשון הוא הפרכה. נסתכל על $(P,<) := ([0,1],<)$ ועל $(Q,\prec) := ([0,1]^2, <_{lex})$.

נגדיר $f(x) := \left(x, \frac{1}{2}\right)$. קל לראות ש־$f(P)$ דיסקרטית ב־Q אבל התמונה ההפוכה שלה לא.

גם הסעיף השני הוא הפרכה, אפילו אפשר להגדיר $(P,<) := ([0,1],<)$. תהי $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \mathbb{Q}$ מניה של המספרים הרציונלים. נגדיר

$$f(x) := \sum_{x_n \le x} 2^{-n}$$

כלומר, הפונקציה מסתכלת על כל הרציונלים שקטנים או שווים מ־x, ומחשבת את הסכום של $\frac{1}{2}$ בחזקת האינדקס שלהם. קל לראות ש־

$$0 \le f(x) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} = 1$$

ולכן הפונקציה אכן מוגדרת לטווח הנתון. בנוסף, קל לראות שהיא לא רציפה משמאל עבור כל x רציונלי. לכן, קבוצת נקודות האי רציפות שלה מכילה את הרציונלים, שהם צפופים ובפרט לא דלילים.

9. יהיו X ו־Y מרחבים טופולוגיים ויהיו $\{C_i\}_{i=1}^n$ כיסוי סגור של X. נניח בנוסף ש־$f_i : C_i \to Y$ פונקציה רציפה יחסית לטופולוגיית תת המרחב. נניח לבסוף שהפונקציות קוהרנטיות, כלומר שלכל $1 \le i \neq j \le n$ ו־$x \in C_i \cap C_j$ מתקיים $f_i(x) = f_j(x)$.
הוכיחו שהפונקציה $f : X \to Y$ שמוגדרת ע"י

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & x \in C_1 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in C_n \end{cases}$$

היא רציפה (אין צורך להראות שהיא מוגדרת היטב). הראו גם שאם C_i לא סגורות אז הטענה לא נכונה.

הערה: הטענה נכונה גם כשמדובר על קבוצות פתוחות.
הערה 2: זוכרים את פונקציית קולץ מהתרגול השני? הפונקציה $f:(\mathbb{Z},d_2)\to(\mathbb{Z},d_2)$ שמוגדרת ע"י:

$$f(n):=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\in 2\mathbb{Z}\\ 3n+1 & n\in 2\mathbb{Z}+1\end{cases}$$

עכשיו ברור שהיא רציפה.
פתרון:

לפי משפט קריטריון הרציפות מההרצאה, מספיק להראות שהתמונה ההפוכה של כל קבוצה סגורה היא סגורה. תהי $S\subseteq Y$ קבוצה סגורה. קל לראות ש־

$$f^{-1}(S)=\bigcup_{i=1}^{n}f_i^{-1}(S)$$

מכיוון ש־f_i רציפות מ־C_i, מתקיים ש־$f_i^{-1}(S)$ סגורה ב־C_i לכל $1\le i\le n$. לפי התרגיל הראשון בתרגול זה, קיימת קבוצה סגורה $S_i'\subseteq X$ כך ש־

$$f_i^{-1}(S)=C_i\cap S_i'$$

שימו לב שמכיוון ש־C_i קבוצה סגורה ב־X, כך גם $f_i^{-1}(S)$ כחיתוך של קבוצות סגורות. לכן $f^{-1}(S)$ קבוצה סגורה כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

כדי לראות דוגמה נגדית במקרה של קבוצות שאינן סגורות אפשר להסתכל על הפונקצייה האופיינית של הרציונלים בתוך הטבעיים $1_{\mathbb{Q}}$ (ישנה הגדרה בתרגיל 7).

10. קבעו אם הקבוצות הבאות צפופות וגם אם הן דלילות

(א) $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ פתרון: ידוע ש־$\mathbb{Q}$ צפופה ב־$\mathbb{R}$ ולכן היא אינה דלילה (כי $int(\mathbb{R})=\mathbb{R}$).

(ב) $A:=\left\{f\in C[0,1]\ \mid\ \exists\alpha>0\ \forall\,0\le x\le\alpha: f(x)=0\right\}\subseteq C[0,1]$ עם מטריקת d_1, כלומר קבוצת כל הפונקציות הרציפות שמתאפסות בסביבה של 0. פתרון: הקבוצה הזו צפופה ולכן לא דלילה. לכל פונקציה רציפה f אפשר למצוא חסם $M>0$ על $[0,1]$. מכאן לכל $\varepsilon>0$ ניתן להגדיר

$$f_\varepsilon(x):=\begin{cases}0 & 0\le x\le\frac{\varepsilon}{2M}\\ \left(x-\frac{\varepsilon}{2M}\right)f\left(\frac{\varepsilon}{M}\right) & \frac{\varepsilon}{2M}\le x\le\frac{\varepsilon}{M}\\ f(x) & \frac{\varepsilon}{M}\le x\end{cases}\in A$$

קל לראות שהפונקציה הזו רציפה לפי תרגיל 9. שימו לב שהקבוצה הזו אינה צפופה יחסית למטריקת d_∞.

(ג) $GL_n(\mathbb{R})\subseteq M_{n\times n}\cong\mathbb{R}^{n\times n}$ (כלומר קבוצת המטריצות ההפיכות) פתרון: הקבוצה הזו צפופה ולכן לא דלילה. נניח בשלילה שקיימת A לא הפיכה ו־$\varepsilon>0$ כך ש־$B(A,\varepsilon)$ מכילה רק מטריצות סינגולריות (לא הפיכות). שימו לב שאנחנו מתייחסים למטריקת המקסימות d_1 על האברים. בפרט, לכל $\delta<\varepsilon$ מתקיים ש־

$$A_\delta:=A-\delta I$$

גם היא לא הפיכה. זה אומר שהדטרמיננטה $|A_\delta| = |A - \delta I| = 0$ לכל $\delta < \varepsilon$. אבל זה אומר שלפולינום האופייני של A_δ יש אינסוף אפסים ולכך בהכרח $p_A \equiv 0$. מכאן ש־$A = 0$. ועם זאת במקרה זה A_δ הפיכה לכל $\delta > 0$. הסתירה מוכיחה שקבוצת המטריצות ההפיכות אכן צפופה.

(ד) $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq M_{n\times n} \cong \mathbb{R}^{n\times n}$, כלומר קבוצת המטריצות עם דטרמיננטה 1. פתרון: הקבוצה הזו סגורה ולכן לא צפופה (כי היא אינה המרחב כולו). מנגד, המימד שלה קטן מ־$n \times n$ ולכן היא לא יכולה להכיל כדור פתוח ממימד $n \times n$. מכאן שהיא דלילה. אפשר לראות את זה באופן יותר פורמלי בעזרת טיעון מאוד דומה לזה של הסעיף הקודם (הפעם עם $p_A \equiv 1$).

(ה) $5\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה־3־אדית פתרון: כבר ראינו שהקבוצה הזו צפופה, ולכן לא דלילה.

(ו) אתגרים

i. $A := \left\{ \frac{a^n}{b^m} \mid n, m \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq \mathbb{R}^{>0}$ עבור $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

א'. רמז: משפט קרונקר

פתרון: אם קיימים $m, n \in \mathbb{Z}$ לא טריוויאלים כך ש־$a^n = b^m$ אז הקבוצה סגורה ודלילה, אחרת היא צפופה. ההוכחה תעלה במסגרת הפתרון לחידה של השבוע.

ii. $\mathbb{P} := \{q \in \mathbb{Z} \mid \text{q is prime}\} \subseteq \mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה ה־p־אדית.

א'. רמז: משפט דריכלה

פתרון: הסגור של הקבוצה הזו הוא $\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \cup \{p\}$ ולכן אינו צפוף ואינו דליל. הוכחה תעלה במסגרת הפתרון לחידה של השבוע.

11. השלימו את הטבלה הבאה:

מרחב טופולוגי	ספרבילי
המרחב הדיסקרטי	רק אם המרחב בן מניה
הטופולוגיה הטריוויאלית	כן
$\mathbb{R}^n$	כן
$[0,1]$	כן
$(\mathbb{Z}, d_p)$	כן
$(\mathbb{Q}, d_p)$	כן
$(\overline{\mathbb{Z}}, d_p)$	כן
$(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$	כן
l_1	כן
l_2	כן
l_∞	לא
$(C[0,1], d_\infty)$	כן
$(C[0,1], d_1)$	כן
$(\{a,b\}, \tau_{\text{Sierpiński}})$	כן
(X, τ_{cof}) עבור X אין סופי	כן
(X, τ_{coc}) עבור X לא בן מניה	לא
$([0,1]^2, <_{lex}, \tau_{<_{lex}})$	לא

פתרון:
נוסיף קצת הסברים עבור כמה דברים לא טריוויאלים:

(א) הקבוצות $(\mathbb{Z}, d_p)$ ו־$(\mathbb{Q}, d_p)$ בנות מניה ולכן ספרביליות.

(ב) לכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים ש־X צפוף בהשלמה $\overline{X}$ ולכן אם X ספרבילי (או בפרט בן מניה), כך גם $\overline{X}$. מכאן שגם $(\overline{\mathbb{Z}}, d_p)$ ו־$(\overline{\mathbb{Q}}, d_p)$ ספרבילים.

(ג) l_1 ו־l_2 ספרבילים. אפשר להסתכל על תת הקבוצה של סדרות רציונליות מתאפסות לבסוף (נשאיר את זה כתרגיל בית לוודא שזו אכן קבוצה צפופה). שימו לב שזו קבוצה בת מניה.

(ד) l_∞ לא ספרבילית. נראה זאת על ידי מציאה של א קבוצות פתוחות זרות. לכל $\{a_n\} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ נסתכל על $B\Big(\{a_n\}, \frac{1}{3}\Big)$. קל לראות שעבור $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \neq \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מתקיים ש־$B\Big(\{a_n\}, \frac{1}{3}\Big)$ ו־$B\Big(\{b_n\}, \frac{1}{3}\Big)$ זרים. לו הייתה תת קבוצה צפופה בת מניה, היא הייתה צריכה להכיל איבר מכל כדור כזה, אבל ידוע שיש א כאלה ולכן זו סתירה.

(ה) קצת טכני לראות ש־$(C[0,1], d_\infty)$ ספרבילי, אבל נראה את הגישה הכללית (אם מישהו לא מצליח להשלים את הפרטים החסרים לבד הוא מוזמן לפנות דרך המייל). נסתכל על "אינטרפולציות לינאריות־רציונליות" של פונקציות רציפות. כלומר, לכל n נגדיר $I_n := \Big\{\frac{m}{n} \mid 1 \le m \le n\Big\} \subseteq [0,1]$ ונסתכל על הפונקציות $LF_n \subseteq C[0,1]$ שמקבלות ב־I_n ערכים רציונלים ובכל קטע $\Big(\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\Big)$ הן קו ישר בין הנקודות בקצוות. אפשר לראות ש־$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} LF_n$ זו קבוצה צפופה בת מניה.

(ו) קל לראות ש־d_∞ דומיננטית ל־d_1 על $C[0,1]$ ולכן הטופולוגיה של $(C[0,1], d_\infty)$ חזקה מזו של $(C[0,1], d_1)$. בפרט, אם החזקה ספרבילית החלשה גם כן.

(ז) את המקרה של הטופולוגיה הקו־סופית והקו־בת־מניה ראינו בתרגיל אחר בקובץ זה.

(ח) כדי לראות ש־$([0,1]^2, <_{lex}, \tau_{<_{lex}})$ לא ספרבילי נמצא אוסף לא בן מניה של קבוצות פתוחות זרות. אכן, נסתכל על אוסף הקטעים הפתוחים:

$$\Big\{\Big((x,0),(x,1)\Big)\Big\}_{x\in[0,1]}$$

קל לראות שהוא לא בן מניה וגם שכל שני אברים בו זרים. כמו במקרה של l_∞ גם כאן אפשר להסיק שהמרחב אינו ספרבילי.