פתרון תרגיל 6 אנליזה הרמונית תש"ף

9 בדצמבר 2019

1. את הטור של $|x|$ חישבנו בתרגול על טור פורייה ממשי, ומצאנו:

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\left(2k-1\right)^2} \cos\left(\left(2k-1\right)x\right) = S\left(x\right)$$

מפה לשם, אם נציב $x_0 = 0$:

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi\left(2k-1\right)^2} = S\left(0\right)$$

ואחרי שנסדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2k-1\right)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} S\left(0\right)$$

וזהו הטור שאנו רוצים לחשב. כעת, למה שווה $S\left(0\right)$? הפונקציה $f\left(x\right) = |x|$ היא:

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

הנגזרות החד־צדדיות קיימות (משמאל זו הנגזרת של $-x$ ומימין הנגזרת של x), ולכן – לפי דיריכלה – נקבל:

$$S\left(0\right) = \frac{\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f\left(x\right) + \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f\left(x\right)}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

וסה"כ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(2k-1\right)^2} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} S\left(0\right) = \frac{\pi^2}{8}$$

2. ראשית, נמצא טור פורייה של הפונקציה. הפונקציה זוגית ולכן $b_n = 0$. ראשית:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx = \frac{2}{\pi} \cdot 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{4}{\pi}$$

שנית:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{\cos\left(\frac{x}{2}-nx\right)+\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)}{2}dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-nx\right)}{\frac{1}{2}-n}+\frac{\sin\left(\frac{x}{2}+nx\right)}{\frac{1}{2}+n}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-n\pi\right)}{\frac{1}{2}-n}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)}{\frac{1}{2}+n}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos n\pi-\cos\frac{\pi}{2}\sin n\pi}{\frac{1}{2}-n}+\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cos n\pi+\cos\frac{\pi}{2}\sin n\pi}{\frac{1}{2}+n}\right) = \frac{(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-n}+\frac{1}{\frac{1}{2}+n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\cdot\frac{\frac{1}{2}+n+\frac{1}{2}-n}{\frac{1}{4}-n^2} = \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}$$

כלומר:

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sim \frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\cos nx = S(x)$$

(א) נציב $x=\pi$ ונקבל:

$$\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}\cos n\pi = S(\pi)$$

שימו לב: $(-1)^{n+1}\cos\pi n = (-1)^{n+1}(-1)^n = -1$, ולכן:

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)} = S(\pi)-\frac{2}{\pi}$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = 2-\pi S(\pi)$$

הפונקציה גזירה, ולכן לפי דיריכלה:

$$S(\pi) = \frac{\lim\limits_{x\longrightarrow\pi^-}f(x)+\lim\limits_{x\longrightarrow-\pi^+}f(x)}{2} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{2} = 0$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = 2$$

(ב) נציב $x=0$ ונקבל:

$$\frac{2}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2-\frac{1}{4}\right)}=S\left(0\right)$$

כלומר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2-\frac{1}{4}}=2-\pi S\left(0\right)$$

הפונקציה גזירה, ולכן - לפי דיריכלה - $S\left(0\right)=f\left(0\right)=\cos 0=1$, ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^2-\frac{1}{4}}=2-\pi$$

3. הפונקציה גזירה ולכן שווה לטור פורייה שלה, כלומר:

$$e^{ix^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\left(n\right)e^{inx}$$

נשים לב שעבור $x=\frac{\pi}{2}$ מתקיים:

$$e^{in\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}n+i\sin\frac{\pi}{2}n=i^n$$

כי: $\sin\frac{\pi}{2}n=1,0,-1,0,1,\ldots$,$\cos\frac{\pi}{2}n=0,-1,0,1,0,\ldots$ ואז:

$$\cos\frac{\pi}{2}n+i\sin\frac{\pi}{2}n=i,-1,-i,1,i,\cdots=i^n$$

ולכן, נציב $x=\frac{\pi}{2}$ ונקבל:

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\left(n\right)i^n$$

וסה"כ:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}i^n\widehat{f}\left(n\right)=e^{i\frac{\pi^2}{4}}$$