אנליזה מודרנית

תקציר

סיכום משפטים זה מבוסס על הרצאותיו של ד"ר שמחה הורוביץ, אוניברסיטת בר אילן, סמסטר א', תשע"ג 2012. אני מאחל בהצלחה לכל קורא ומתעניין בתחום! עידכון אחרון התבצע ב־21 בינואר 2013. ספר מומלץ לקורס הוא Royden-Real Analysis.

במידה ומישהו רוצה לשתף הערות או להודיע על טעות כלשהי, שלחו לי למייל mail@studenteen.org.

חלק I

מידת לבג

ברוב הקורס נדבר על אינטגרל לבג. אינטגרל לבג הוא הכללה של אינטגרל רימן. כזכור, קיימות שתי גישות שקולות להגדרת אינטגרל רימן.

1 תזכורת לאינטגרל רימן

הגדרה 1.1 אינטגרל רימן מוגדר בעזרת "סכומי רימן". בפרט אם $f(x)$ מוגדרת וחסומה ב־$[a,b]$, נגדיר חלוקה P של $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

סכום רימן הבנוי על P הוא סכום מהסוג

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

עבור $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ כלשהו.

2 מידת לבג

אפשר לומר שתחילת החידוש של לבג היא שבמקום לחלק את ציר ה־x, אפשר לחלק את ציר ה־y. נחלק את ציר ה־y עם חלוקה $y_0, \ldots, y_n$, כאשר נניח וחלק מהגרף נמצא בקטע $[y_{k-1}, y_k]$. השטח מתחת לגרף מקורב ע"י **סכום לבג**,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$$

כאשר $E_k = \{x \in [a,b] \mid y_{k-1} \le f(x) \le y_k\}$, ו־$m(E_k)$ היא המידה או הגודל של E_k.

כאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר, נדרוש שכל סכומי לבג ישאפו לגבול אחד. אם כן, f אינטגרבילית לבג ב־$[a,b]$ והגבול הוא

$$\int_{[a,b]} f dm$$

כאשר $f(x)$ רציפה ב־$[a,b]$, אז $E_k = \{x \in [a,b] \mid y_{k-1} \le f(x) \le y_k\}$ הוא איחוד של קטעים, ומידת E_k היא סכום הקטעים. אבל אם f אינה רציפה, אז הקבוצות E_k הן קבוצות כלשהן, ונשאלת השאלה כיצד להגדיר מידת קבוצה כלשהי.

2.1 מידה

הגדרה 2.1 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. נגדיר את המידה החיצונית של E ע"י

$$m^*(E) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right\}$$

כאשר I_n הם קטעים פתוחים ו־$|I_n|$ הוא אורך I_n.

בגלל שמדובר ב־inf, עבור כל $E \subset \mathbb{R}$, הערך $m^*(E)$ מוגדר היטב ומקיים

$$0 \le m^*(E) \le +\infty$$

משפט 2.2 מתקיים:

1. $m^*(\{x_0\}) = 0 = m^*(\emptyset)$ לכל $x_0 \in \mathbb{R}$.
2. אם $A \subset B \subset \mathbb{R}$, אזי $m^*(A) \le m^*(B)$.

משפט 2.3 אם $E \subset \mathbb{R}$ קטע כלשהו אז $m^*(E) = |E|$.

משפט 2.4 אם $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות ב־$\mathbb{R}$ ואם $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, אזי

$$m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

הגדרה 2.5 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. הזזה של E היא קבוצה מהסוג

$$x_0 + E = E + x_0 = \{x_0 + y : y \in E\}$$

משפט 2.6 תהי $E \subset \mathbb{R}$ ו־$x_0 \in \mathbb{R}$ מספר כלשהו. אזי

$$m^*(x_0 + E) = m^*(E)$$

ז"א, m^* שמורה תחת הזזה.

2.2 תכונות המידה

תכונות רצויות למידה m על $\mathbb{R}$ הן,

1. לכל $E \subset \mathbb{R}$, $m(E)$ מוגדרת ומקיימת $0 \le m(E) \le \infty$.
2. לכל קטע $E \subset \mathbb{R}$, מתקיים $m(E) = |E|$.
3. m שמורה תחת הזזה.
4. אם $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$[1] אזי $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$.

נשים לב כי נובע מתכונות אלה כי אם $E \subset F \subset \mathbb{R}$ אז $m(E) \le m(F)$.

טענה 2.7 לא קיימת מידה m המקיימת את כל ארבעת התכונות הנ"ל.

2.3 קבוצות מדידות לבג

נאמץ את ההגדרה של Cartheodory לכך.

הגדרה 2.8 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. נאמר ש־E מדידה לבג[2] אם לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^C\right)$$

כאשר E^C המשלים של E.

הערה 2.9 אם E ו־F מדידות ואם $E \cap F = \emptyset$, אז $m^*(E \cup F) = m^*(E) + m^*(F)$.

[1] איחוד זר.
[2] או רק מדידה.

משפט 2.10 מתקיים:

1. $E \subset \mathbb{R}$ מדידה $\iff$ E^C מדידה.
2. $E \subset \mathbb{R}$ מדידה $\iff$ לכל $A \subset \mathbb{R}$ מתקיים $m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*\left(A \cap E^C\right)$.
3. אם $m^*(E) = 0$ אז E מדידה.
4. אם E מדידה אז לכל $x_0 \in \mathbb{R}$, מתקיים $x_0 + E$ מדידה.

משפט 2.11 כל קטע מהסוג $E = (a, \infty)$ עבור $a \in \mathbb{R}$ הוא קבוצה מדידה.

משפט 2.12 נניח $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}$ מדידות. אזי, $E_1 \cup E_2$ מדידה.

מסקנה 2.13 יהיו $E_1, E_2, \ldots, E_n$ קבוצות מדידות. אזי,

1. $\bigcup_{k=1}^n E_k$ מדידה.
2. $\bigcap_{k=1}^n E_k$ מדידה.

משפט 2.14 יהיו $E_1, \ldots, E_n$ קבוצות מדידות זרות בזוגות, ונגדיר $E = \biguplus_{k=1}^n E_k$. אזי לכל $A \subset \mathbb{R}$

$$m^*(A \cap E) = \sum_{k=1}^n m^*(A \cap E_k)$$

מסקנה 2.15 בתנאים של המשפט **2.14**, $m^*(E) = \sum_{k=1}^n m^*(E_k)$. כדי להוכיח זאת, ניקח במשפט הקודם $A = \mathbb{R}$ או $A = E$.

משפט 2.16 תהי X קבוצה ו־S אלגברה של תת־קבוצות של X. נניח ש־$(E_n)_{n=1}^\infty$ שייכות ל־S. אזי, **קיימת** סדרה $(F_n)_{n=1}^\infty$ של קבוצות ב־S כך ש־

1. לכל n, $F_n \subset E_n$.
2. ה־F_n זרות בזוגות.
3. לכל n מתקיים $\bigcup_{k=1}^n E_k = \bigcup_{k=1}^n F_n$.
4. $\bigcup_{k=1}^\infty E_k = \bigcup_{k=1}^\infty F_k$.

משפט 2.17 יהיו $(E_n)_{n=1}^\infty$ קבוצות מדידות לבג. נגדיר $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. אזי, E מדידה לבג.

מסקנה 2.18 במצב של משפט **2.17**,

$$m^*(E) = m^*\left(\biguplus_{k=1}^\infty E_k\right) = \sum_{k=1}^\infty m^*(E_k)$$

מסקנה 2.19 אם $S \subset \mathbb{R}$ תת קבוצה **בת מנייה**, אז S מדידה לבג ו־$m^*(S) = 0$.

מסקנה 2.20 הקבוצה E שבנינו בעזרת אקסיומת הבחירה היא לא מדידה לבג.

הגדרה 2.21 הצמצום של m^* על הקבוצות המדידות הוא **מידת לבג** על $\mathbb{R}$, ומסומן ב־m.

2.4 σ־אלגברה ואלגברת בורל

הגדרה 2.22 תהי X קבוצה כלשהי. אוסף $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(x)$ נקרא σ אלגברה אם

1. $E \in \mathcal{S} \iff E^C \in \mathcal{S}$.
2. $(E_n)_{n=1}^\infty$ שייכים ל־S אזי $\bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{S}$[3].
3. $\emptyset \in \mathcal{S}$[4].

מהמשפטים הקודמים נובע שהקבוצות המדידות לבג מהוות σ אלגברה של תת קבוצות של $\mathbb{R}$. נאפיין חלק מהקבוצות ב"אלגברת לבג" $\mathcal{L} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ של קבוצות מדידות.

ובכן, במשפט **2.11** הוכחנו שכל קטע מהסוג (a, ∞) מדיד. כמו כן כל קטע מהסוג $(-\infty, b)$ מדיד ולכן החיתוך שלהם (a, b) מדיד. מכאן, שכל איחוד בן מנייה של קטעים פתוחים מדיד, ז"א, כל קבוצה פתוחה ב־$\mathbb{R}$ מדידה. ע"י משלים, כל קבוצה סגורה מדידה.

משפט 2.23 תהי X קבוצה כלשהי, ויהי $\mathcal{T}$ אוסף של תתי קבוצות של X. אזי, קיימת σ אלגברה מינימלית $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ כך ש־$\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$.

[3] וממילא גם $\bigcap_{n=1}^\infty E_n$.
[4] ומכאן גם $X \in S$.

הגדרה 2.24 יהי X מרחב טופולוגי. אלגברת בורל $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{P}(x)$ היא ה־σ אלגברה המינימלית של תתי קבוצות של X שמכילה את כל הקבוצות הפתוחות ב־X.

מסקנה 2.25 מכל הנ"ל נסיק ש־$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R})$.

משפט 2.26 תהי $E \subset \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג. אז קיימת קבוצה מדידה F כך ש־$m(F) = 0$ וקבוצה S מטיפוס G_δ כך ש־

$$S = E \uplus F$$

או

$$E = S \backslash F$$

3 מידות כלליות

נכליל כעת את המושג של מידת לבג עבור קבוצות כלשהן.

הגדרה 3.1 תהי X קבוצה כלשהי ותהי $\mathcal{S}$ σ אלגברה של תתי קבוצות של X. הזוג $(X, \mathcal{S})$ נקרא **מרחב מדיד**.

כעת, נגדיר את המושג של מידה על על מרחב מדיד,

הגדרה 3.2 יהי $(X, \mathcal{S})$ מרחב מדיד. מידה (חיובית) על $(X, \mathcal{S})$ היא פונקציה

$$\mu : \mathcal{S} \to [0, \infty]$$

כך ש־

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. אם $(E_n)_{n=1}^\infty$ ב־$\mathcal{S}$ זרות בזוגות אז

$$\mu\left(\biguplus_{n=1}^\infty E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$$

לפעמים קוראים ל־$\mathcal{S}$ "הקבוצות המדידות לפי μ, או $d\mu$". השלישייה $(X, \mathcal{S}, \mu)$ נקראית "מרחב מידה".

משפט 3.3 אם $E \subset F$ מדידות[5], אז $\mu(E) \le \mu(F)$.

מסקנה 3.4 בנתונים של משפט **3.3** אם $\mu(E) < \infty$ אז $\mu(F \backslash E) = \mu(F) - \mu(E)$.

משפט 3.5 נניח שהקבוצות $(E_n)_{n=1}^\infty$ שייכות ל־$\mathcal{S}$, ונרשום $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. אזי,

$$\mu(E) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(E_n)$$

משפט 3.6

1. נניח ש־$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots$ קבוצות ב־$\mathcal{S}$ ונרשום $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. אזי,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

2. נניח ש־$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ קבוצות ב־S ונניח ש־$\mu(E_1) < \infty$. נרשום $E = \bigcap_{n=1}^\infty E_n$. אזי,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

4 פונקציות מדידות

בתחילת הקורס, אמרנו שלפונקציה חסומה f על $\mathbb{R}$ אפשר לבנות סכומי לבג. בפרט, נחלק את הטווח של f ע"י

$$y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n$$

ונבנה "סכום לבג",

$$\sum_{k=1}^n y_k m(E_k)$$

כאשר:

$$E_k = \{x \in \mathbb{R} : y_{k-1} < f(x) \le y_k\}$$

הגבול של סכומים אלה כאשר החלוקה נעשית עדינה ביותר הוא אינטגרל לבג $\int f dm$. דרישה מינימלית בשביל לבצע תכנית זו היא שלכל חלוקה ולכל k, מתקיים ש־E_k היא קבוצה מדידה.

זאת המוטיבציה להגדרה של פונקציה מדידה.

[5] ז"א, שייכות ל־$\mathcal{S}$.

משפט 4.1 יהי $(X,\mathcal{S})$ מרחב מדיד, ותהי $f:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי. אזי, התנאים הבאים שקולים:

1. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים:
$$\{x\in X: f(x)>\alpha\}\in\mathcal{S}$$

2. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים:
$$\{x\in X: f(x)\geq\alpha\}\in\mathcal{S}$$

3. לכל $\alpha\in\mathbb{R}$, מתקיים:
$$\{x\in X: f(x)\leq\alpha\}\in\mathcal{S}$$

ואם התנאים הללו מתקיימים אז אומרים ש־f מדידה $\mathcal{S}$.[6]

מסקנה 4.2 בנתונים של משפט **4.1**,

1. לכל $x_0\in\mathbb{R}^*$, מתקיים $f^{-1}(x_0)\in\mathcal{S}$.
2. לכל קטע $I\subset\mathbb{R}^*$ מתקיים $f^{-1}(I)\in\mathcal{S}$.
3. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה אז f מדידה לבג.

משפט 4.3 יהי $(X,\mathcal{S})$ מרחב מדיד, ויהיו $f:X\to\mathbb{R}$ ו־$g:X\to\mathbb{R}$ פונקציות מדידות $\mathcal{S}$, ויהי $c\in\mathbb{R}$ קבוע. אזי,

1. $f\pm g$ מדידה $\mathcal{S}$.
2. $c\cdot f$ מדידה $\mathcal{S}$.
3. $f\cdot g$ מדידה $\mathcal{S}$.

הערה 4.4 לגבי $f:X\to\mathbb{R}^*$ ו־$g:X\to\mathbb{R}^*$ אזי $f(x)+g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x)=\infty$ ו־$-\infty$ או להיפך, כמו כן $f(x)-g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x)=\infty$ וגם $g(x)=\infty$, ו־$f(x)\cdot g(x)$ לא מוגדרת כאשר $f(x)=0$ ו־$g(x)=\pm\infty$ או להיפך. אבל אם f ו־g מדידות $\mathcal{S}$ ונסכים שבכל הנקודות הבעיתיות הנ"ל $f\pm g$ ו־$f\cdot g$ יקבלו את אותו ערך מסוים (למשל 0) בכולם, אז קל להוכיח ש־$f\pm g$ ו־$f\cdot g$ מדידות.

[6] או פשוט מדידה.

המשפט הבא יאמר שאם $\{f_n\}$ סדרת פונקציות מדידות אז

$$\sup f_n,\inf f_n,\overline{\lim} f_n,\overline{\lim} f_n$$

גם הן מדידות. כאשר פונקציות אלה מוגדרות נקודתית. ז"א, לכל $x_0\in X$ $\{f_n(x_0)\}$ סדרת מספרים ב־$\mathbb{R}^*$ ויש לה $\sup,\inf,\overline{\lim},\underline{\lim}$.

תזכורת. אם $\{a_n\}$ סדרה ב־$\mathbb{R}$ (או ב־$\mathbb{R}^*$) יש שתי הגדרות שקולות ל־$\overline{\lim} a_n$. בפרט, $\overline{\lim} a_n$ = הגבול החלקי המקסימלי של הסדרה = $\inf\limits_k\sup\limits_{n\geq k} a_n$.

לסדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$, $\overline{\lim} f_n(x)$ מחושב נקודתית.

משפט 4.5 יהי $(X,\mathcal{S})$ מרחב מדיד, ותהי $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת פונקציות $f_n:X\to\mathbb{R}^*$ שמדידות $\mathcal{S}$. אזי $\sup f_n(x)$, $\inf f_n(x)$, $\overline{\lim} f_n(x)$, $\underline{\lim} f_n(x)$ מדידות $\mathcal{S}$, ואם קיים $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ היא מדידה $\mathcal{S}$.

חלק II

אינטגרל לבג הכללי

5 בנייה בשלבים

בפרק זה מדובר תמיד בממ"ח $(X,\mathcal{S},\mu)$. עבור $f:X\to\mathbb{R}^*$ מדידה נבנה בשלבים את האינטגרל:

$$\int_X f d\mu$$

5.1 אינדיקטורים

נתחיל עם הפונקציות המדידות האלמנטריות ביותר. עבור $E\in\mathcal{S}$ נגדיר **אינדיקטור** $I_E:E\to\mathbb{R}$ ע"י

$$I_E(x)=\begin{cases}1 & x\in E\\ 0 & x\notin E\end{cases}$$

תרגיל פשוט לראות ש־I_E פונקציה מדידה $\iff$ E קבוצה מדידה.

5.2 פונקציות פשוטות

השלב הבא הוא להגדיר פונקציות פשוטות, שהן פונקציות מדידות $\varphi : X \to \mathbb{R}$ המקבלות מספר סופי של ערכים. אם למשל φ מקבלת את הערכים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ אז עבור $1 \le k \le n$ נגדיר,

$$E_k = \varphi^{-1}(a_k) = \{x \in X : \varphi(x) = a_k\}$$

כיוון שכל φ מדידה כל $E_k \in \mathcal{S}$ ואז,

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}(x)$$

הוכחה. ניקח $x \in X$ כלשהו, אז $\varphi(x) = a_{k_0}$ שזה אחד הערכים $a_1, \ldots, a_n$. ממילא $x \in E_{k_0}$ ועבור $k \neq k_0$ מתקיים $x \notin E_k$. נובע שבנקודה x:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}(x) = \sum_{k \neq k_0} a_k I_{E_k}(x) + a_{k_0} I_{E_{k_0}}(x) = a_{k_0} \cdot 1 = \varphi(x)$$

■

ההצגה הנ"ל $\sum a_k I_{E_k}$ היא ההצגה הקנונית של φ, אבל למעשה כל פונקציה פשוטה ניתנת ל־∞ הצגות כצירופים ליניארים של אינדיקטורים. למשל אם $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ נתון ע"י

$$\varphi(x) = I_{[0,1]}(x)$$

וגם כן $\varphi(x) = I_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + I_{(\frac{1}{2},1]}(x) = 2I_{[0,1]}(x) - I_{[0,\frac{1}{2})} - I_{[\frac{1}{2},1)}$.

הערה 5.1 אם φ, ψ פונקציות פשוטות ואם $c \in \mathbb{R}$ קבוע אז $\varphi \pm \psi$, $c\varphi$, $\varphi\psi$ פשוטות, כי כולן פונקציות מדידות בעלות מספר סופי של משתנים.

הגדרה 5.2 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח ותהי $\varphi : X \to \mathbb{R}$ פונקציה פשוטה אי־שלילית $0 \le \varphi$ עם ההצגה הקנונית:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$$

אז נגדיר את האינטגרל

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

כאשר מוסכם שאם איזה $a_k = 0$ ואותו E_k מקיים $\mu(E_k) = \infty$ אז $a_k \mu(E_k) = 0$.

בגלל ש־φ אי־שלילית והמוסכמה שלנו, האינטגרל $\int_X \varphi d\mu$ מוגדר היטב ומקיים $0 \le \int_X \varphi d\mu \le \infty$.

הגדרה 5.3 אם $E \subset X$ מדידה אפשר להגדיר $\int_E \varphi d\mu$ ע"י $\int_X \varphi \cdot I_E d\mu$, או א]שר לכתוב את $\varphi|_E$ ע"י $\sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k \cap E}$ וממילא

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k \cap E)$$

קל להוכיח ששתי ההגדרות שקולות.

משפט 5.4 נניח ש־$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j I_{E_j} \ge 0$ היא פונקציה פשוטה, כאשר E_j זרות בזוגות[7]. אזי,

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

משפט 5.5 יהיו $\varphi, \varphi \ge 0$ פונקציות פשוטות, ו־$\alpha \ge 0$ קבוע. אזי,

1. $\int_X \alpha\varphi d\mu = \alpha \int_X \varphi d\mu$.
2. $\int_X (\varphi + \psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu$.
3. אם $E, F \in \mathcal{S}$ ואם $E \cap F = \emptyset$ אזי

$$\int_{E \uplus F} \varphi d\mu = \int_E \varphi d\mu + \int_F \varphi d\mu$$

4. אם $0 \le \varphi \le \psi$, אזי

$$0 \le \int_X \varphi d\mu \le \int_X \psi d\mu$$

5. אם $E \in \mathcal{S}$ ואם לכל $x \in E$ $m \le \varphi(x) \le M$ אזי

$$m \cdot \mu(E) \le \int_E \varphi d\mu \le M \cdot \mu(E)$$

[7] אך לאו דווקא קנונית.

מסקנה 5.6 אם $\varphi_1,\ldots,\varphi_n \geq 0$ פשוטות ואם $a_1,\ldots,a_n \geq 0$ קבועים, אזי

$$\int_X \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_X \varphi_k d\mu$$

מסקנה 5.7 אם $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$ [8] פונקציה בהצגה כלשהי, אזי

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(E_k)$$

מסקנה 5.8 אם $E = \biguplus_{k=1}^{n} E_k$ מדידות ואם $\varphi \geq 0$ פשוטה אז

$$\int_E \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} \varphi d\mu$$

5.3 אינטגרל לבג הכללי לפונקציות חיוביות

הגדרה 5.9 תהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה מדידה. אז נגדיר

$$\int_X f d\mu = \sup_{0\leq\varphi\leq f} \int_X \varphi d\mu$$

כאשר φ פונקציות פשוטות. ה־sup תמיד מוגדר כמספר ב־$[0,\infty]$. אם $E \subset X$ מדידה יש שתי הגדרות שקולות:

$$\int_E f d\mu = \sup_{0\leq\varphi(x)\leq f(x):x\in E} \int_E \varphi d\mu = \int_X f\cdot I_E d\mu$$

נעיר שאם $\varphi \geq 0$ פשוטה, יש לנו שתי הגדרות ל־$\int_X \varphi d\mu$,

1. ההגדרה המקורית $\sum a_k\mu(E_k)$.
2. $\sup_{0\leq\psi\leq\varphi} \int_X \psi d\mu$ כאשר ψ פשוטה.

[8] $a_k \geq 0$.

משפט 5.10 יהיו $f,g : X \to [0,\infty]$ מדידות ו־$c > 0$ קבוע. אזי,

1. אם $0 \leq f \leq g$ אזי $0 \leq \int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.
2. אם $A \subset B \subset X$ מדידות אז

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$$

3. $\int_X c\cdot f d\mu = c\cdot\int_X f d\mu$.
4. אם $f(x) \equiv 0$ ב־$E \in \mathcal{S}$ אז

$$\int_E f d\mu = 0$$

אפילו אם $\mu(E) = \infty$.

5. אם $\mu(E) = 0$ אז

$$\int_E f d\mu = 0$$

אפילו אם $f(x) = +\infty$ ב־E.

6. אם $m \leq f(x) \leq M$ ב־E אז $m\cdot\mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq M\cdot\mu(E)$ וגם $\int_E c d\mu = c\mu(E)$.

משפט 5.11 (משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג) נניח שלכל n מוגדרת ומדידה $f_n : X \to [0,\infty]$, ונניח שלכל $x \in X$

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq \ldots$$

אזי מוגדרת ומדידה $f(x) = \sup f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ ומתקיים

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

משפט 5.12 (למת פאטו) לכל n נניח ש־$f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה. נגדיר $g(x) = \underline{\lim} f_n(x)$, אזי $g(x) \geq 0$ ומדידה ומתקיים

$$\int_X g d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

(במילים אחרות, $\int_X \underline{\lim} f_n d\mu \leq \underline{\lim}\int_X f_n d\mu$)

מסקנה 5.13 נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$, הפונקציה $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה, ונניח שקיים

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

אזי מתקיים

$$\int_X f d\mu \le \underline{\lim} \int_X f_n d\mu$$

הערה. בהרבה ספרים המסקנה נקראית למת פאטו ולא מביאים את משפט **5.12**, שהוא יותר כללי.

משפט 5.14 תהי $f : X \to [0,\infty]$ מדידה. אזי, קיימת סדרה עולה של פונקציות פשוטות

$$0 \le \varphi_1(x) \le \varphi_2(x) \le \dots$$

כך שלכל $x \in X$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

ומתקיים

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu$$

הערה. לכל n,

$$\int_X \varphi_n d\mu = \sum_{k=1}^{2^{2n}} \frac{k}{2^n} \mu(E_{n,k})$$

הם סכומי לבג שהגדרנו בשיעור הראשון, ואמרנו שהם הסכומים המקרבים את $\int_X f d\mu$. עכשיו הוכחנו את זה עבור $f \ge 0$ מדידה.

משפט 5.15 יהיו $f,g : X \to [0,\infty]$ מדידות. אזי,

1. $$\int_X f d\mu + \int_X g d\mu = \int_X (f+g) d\mu$$

2. אם לכל $n \in \mathbb{N}$ הפונקציה $f_n : X \to [0,\infty]$ מדידה ואם

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

אזי

$$\int_X f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu$$

3. אם $E = \biguplus_{n=1}^{\infty} E_n$ קבוצות מדידות אזי

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

4. לכל $E \in \mathcal{S}$ נגדיר $\nu(E) = \int_E f d\mu$. אזי ν מידה על $(X,\mathcal{S})$.

5.4 כמעט בכל מקום

הגדרה 5.16 יהי $(X,\mathcal{S},\mu)$ ממ"ח. אומרים שתכונה P נכונה כמעט בכל מקום[9] $(d\mu)$ אם

$$E = \{x \in X : P(x) = \mathsf{false}\}$$

מקיימת $\mu(E) = 0$.

מכאן ואילך נחזור למסגרת של ממ"ח $(X,\mathcal{S},\mu)$ קבוע, וכל מושג של כב"מ הינו ביחס ל־μ הזו.

משפט 5.17 יהיו $f,g : X \to [0,\infty]$ מדידות. אזי,

1. אם $f(x) = g(x)$ כב"מ אז

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

2. $\int_X f d\mu = 0 \iff f(x) = 0$ כב"מ.
3. אם $\int_X f d\mu < \infty$ אז $f(x) < \infty$ כב"מ.

מסקנה. מסעיף 2 של משפט **5.14**, נובע שאם $\mu(E) > 0$ ואם $f(x) > 0$ על E אז $\int_E f d\mu > 0$.

[9] קיצור מקובל הוא כב"מ.

הגדרה 5.18 יהי $(X,\mathcal{S},\mu)$ ממ"ח. μ נקראית **מידה שלמה** אם לכל $E\in\mathcal{S}$ כך ש־$\mu(E)=0$ כל תת קבוצה של E שייכת ל־$\mathcal{S}$.

משפט 5.19 יהי $(X,\mathcal{S},\mu)$ ממ"ח, ונניח ש־μ מידה שלמה על $\mathcal{S}$. עוד נניח ש־$f:X\to\mathbb{R}^*$ מדידה ו־$g:X\to\mathbb{R}^*$ מקיימת $f(x)=g(x)$ כב"מ $(d\mu)$. אזי g מדידה $\mathcal{S}$.

לאור המושגים הנ"ל, אפשר לשפר במעט את המשפטים שלנו. למשל, משפט **5.11** נכון בהכללה הבאה:

משפט 5.11 המוכלל לכל n נניח ש־$f_n:X\to[0,\infty]$ מדידה, עוד נניח שלכמעט כל x $(d\mu)$

$$0\le f_1(x)\le f_2(x)\le\dots$$

ו־$f:X\to[0,\infty]$ מדידה ומקיימת $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ כב"מ. אזי,

$$\int_X fd\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_nd\mu$$

ואם μ מידה שלמה, אין צורך להניח ש־f מדידה, לא כיוון ש־$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ כב"מ, f מדידה אוטומטית.

משפט 5.12 המוכלל נניח שלכל n מתקיים כי $f_n:X\to[0,\infty]$ מדידה ונניח שקיים $f:X\to[0,\infty]$ מדידה כך שכב"מ

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$$

אז

$$\int_X fd\mu\le\underline{\lim}\int_X fd\mu$$

ואם μ מידה שלמה אז f פונקציה מדידה באופן אוטומטי.

מסקנות נוספות ממשפט 5.19. כבר ציינו שאם $f,g:X\to\mathbb{R}^*$ אז יש בעיה להגדיר $f+g$ בנקודות שבהן $f(x)=+\infty$ ו־$g(x)=-\infty$ או להיפך ויש בעיה להגדיר $f(x)g(x)$ במצב של $0\cdot\pm\infty$. אבל אם μ מידה שלמה ואם ידוע ש־$|f(x)|<\infty$ כב"מ וגם $|g(x)|<\infty$ כב"מ אז הפונקציות $f\pm g$ ו־fg יהיו מדידות באופן ב"ת בהגדרתן בנקודות הבעייתיות.

5.5 אינטגרל לבג הכללי

עדיין אנחנו עוסקים בממ"ח קבוע $(X,\mathcal{S},\mu)$ ועכשיו נעיין בפונקציות $f:X\to\mathbb{R}^*$. תחילה, נגדיר

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x) & f(x)\ge0\\0 & f(x)<0\end{cases}=\max(f(x),0)$$

ונגדיר

$$f^-(x)=\begin{cases}0 & f(x)>0\\-f(x) & f(x)<0\end{cases}=\max(0,-f(x))$$

כעת, אם f מדידה אז f^+ ו־f^- מדידות ולפי עצם ההגדרה $f^+,f^-\ge0$. לכל $x\in X$, $f(x)=f^+-f^-(x)$, ו־$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x)$.

הגדרה 5.20 תהי $f:X\to\mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי. נאמר ש־f אינטגרבילית $d\mu$ אם f מדידה $\mathcal{S}$ ואם

$$\int_X f^+d\mu<\infty$$

וגם

$$\int_X f^-d\mu<\infty$$

ואם כן מגדירים

$$\int_X fd\mu=\int_X f^+d\mu-\int_X f^-d\mu$$

לפי זה גם פונקציה מדידה $f:X\to[0,\infty]$ נקראית אינטגרבילית $d\mu$ אם $\int_X fd\mu<\infty$.

משפט 5.21 תהי $f:X\to\mathbb{R}^*$ מדידה. אז f אינטגרבילית $\iff$ $|f|$ אינטגרבילית, ואם כן

$$\left|\int_X fd\mu\right|\le\int_X|f|d\mu$$

נעיר שאם $E\subset X$ מדידה, אפשר להגדיר את $\int_E fd\mu$ ע"י

$$\int_E f^+d\mu-\int_E f^-d\mu$$

או באופן שקול ע"י $\int_X f\cdot I_Ed\mu$.

משפט 5.22 נניח ש־$f,g : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות אינטגרביליות, ו־$c \in \mathbb{R}$ קבוע. אזי,

1. אם $h : X \to \mathbb{R}^*$ מדידה ואם $|h(x)| \le |f(x)|$ לכל $x \in X$, אזי h אינטגרבילית.
2. f אינטגרבילית על כל תת קבוצה מדידה $E \subset X$ ואם $E = A \uplus B$ (A ו־B מדידות וזרות) אז
$$\int_E f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$
3. $\mu\{x \in X : |f(x)| = \infty\} = 0$.
4. אם E מדידה ואם $\mu(E) = 0$ אז $\int_E f d\mu$.
5. cf אינטגרבילית ו־
$$\int_X cf d\mu = c \int_X f d\mu$$
6. $f + g$ אינטגרבילית ומתקיים
$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$$
7. אם $f_1, \ldots, f_n$ אינטגרביליות ואם $c_1, \ldots, c_n$ קבועים אז $\sum_{k=1}^n c_k f_k$ אינטגרבילית ומתקיים:
$$\int_X \left(\sum_{k=1}^n c_k f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^n c_k \int_X f_k d\mu$$
8. אם לכל $x \in X$ $f(x) \le g(x)$ אזי
$$\int_X f d\mu \le \int_X g d\mu$$

הכללות.

1. בסעיף 2 אפשר להכליל כך. אם $E = \biguplus_{n=1}^\infty E_n$ כל E_n מדידה ואז
$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f d\mu$$

כי לפי משפט **5.15**
$$\int_E f^+ d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f^+ d\mu$$
וגם
$$\int_E f^- d\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} f^- d\mu$$
נחסיר נוסחאות לקבל את התוצאה.

2. בכל הסעיפים מספיק שהתנאים יתקיימו כב"מ $d\mu$, אם ידוע שהפונקציות מדידות.

משפט 5.23 (משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג) יהיו $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ פונקציות מדידות ונניח שלכל $x \in X$ קיים הגבול
$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$
עוד נניח שקיימת פונקציה אינטגרבילית $g : X \to [0, \infty]$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in X$, $|f_n(x)| \le g(x)$. אזי כל f_n וגם f אינטגרבילית ומתקיים
$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

משפט 5.24 (משפט ההתכנסות החסומה) נניח ש־$E \subset X$ מדידה ו־$\mu(E) < \infty$. עוד נניח שלכל $n \in \mathbb{N}$ מוגדרת פונקציה מדידה $f_n : E \to \mathbb{R}$ וקיים $M > 0$ כך שלכל n ולכל $x \in E$, $|f_n(x)| \le M$ ולכל $x \in E$ קיים $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$. אזי,
$$\int_E f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu$$

חלק III

הכללות לבג לתורת רימן

לאורך כל פרק זה, m היא מידת לבג על $\mathcal{L}(\mathbb{R})$. הרבה פעמים נכתוב $\int_a^b f dm$ במקום $\int_{[a,b]} f dm$.

6 משפט הגזירה של לבג

המשפט הראשון בפרק הוא משפט הגזירה של לבג, האומר בין היתר שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית אזי $f'(x)$ קיימת כב"מ (dm).

אחד המכשירים להוכחת משפט זה הוא לפת ויטלי, שהיא למה **קומבינטורית**.

6.1 למת ויטלי

הגדרה 6.1 תהי $E\subset\mathbb{R}$ קבוצה כלשהי, ותהי $\mathcal{F}$ משפחה של קטעים. נאמר ש־$\mathcal{F}$ מכסה את E במובן של *ויטלי* אם לכל $x\in E$ ולכל $\epsilon>0$ קיים קטע $I\in\mathcal{F}$ כך ש־$x\in I$ ו־$|I|<\epsilon$. *במילים,* $\mathcal{F}$ מכילה קטעים קטנים כרצוננו סביב כל נקודה.

למת ויטלי. נניח ש־$E\subset\mathbb{R}$ קבוצה המקיימת $m^*(E)<\infty$, ונניח ש־$\mathcal{F}$ משפחה של קטעים שמכסה את E במובן של ויטלי. אזי לכל $\epsilon>0$ קיים מספר סופי של קטעים זרים בזוגות מ־$\mathcal{F}$ כך ש־$I_1,\dots,I_n$ כך ש־

$$m^*\left(E\backslash\biguplus_{k=1}^{\infty}I_k\right)<\epsilon$$

ז"א, E **"כמעט"** שווה לאיחוד זר של קטעים מ־$\mathcal{F}$.

תזכורת. אם $g(x)$ פונקציה מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 אז מגדירים

$$\underline{\lim}_{x\to x_0}g(x)=\sup_{\delta>0}\inf_{0<|x-x_0|<\delta}g(x)$$

שזה המינימום של גבולות $\lim_{n\to\infty}g(x_n)$ עבור סדרות $x_0\neq x_n\to x_0$.

$$\overline{\lim}_{x\to x_0}g(x)=\inf_{\delta>0}\sup_{0<|x-x_0|<\delta}g(x)$$

שזה המקסימום של גבולות $\lim_{n\to\infty}g(x_n)$ כאשר $x_0\neq x_n\to x_0$. כעת, $\lim_{x\to x_0}g(x)$ קיים $\iff$ $\underline{\lim}_{x\to x_0}g(x)=\overline{\lim}_{x\to x_0}g(x)$.

מסקנה 6.2 בנתונים של למת ויטלי, אם $m^*(E)=s<\infty$ אז לכל $\epsilon>0$ יש מספר סופי של קטעים $I_1,\dots,I_n$ זרים בזוגות מ־$\mathcal{F}$ כך שאם

$$K=\biguplus_{k=1}^{\infty}I_k$$

אז $m^*(E\cap K)>s-\epsilon$ ו־$m(K)<s+\epsilon$.

למה 6.3 תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית לבג, ויהי $c>0$ קבוע. אזי לכל $a<b\in\mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x+c)dm=\int_{a+c}^{b+c}f(x)dm$$

משפט 6.4 (משפט הגזירה של לבג) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה עולה. אזי f גזירה כב"מ (dm). $0\le f'(x)$ כב"מ ומתקיים

$$\int_a^b f'dm\le f(b)-f(a)$$

מסקנה 6.5 אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מקיימת $f(x)=g(x)-h(x)$ כאשר g ו־h עולות ב־$[a,b]$ אז $f'(x)$ קיימת כב"מ ב־$[a,b]$.

מסקנה 6.6 נניח ש־$f(x)$ מוגדרת ואינטגרבילית ב־$[a,b]$ ולכל $x\in[a,b]$ נגדיר

$$F(x)=\int_a^x fdm$$

אזי $F'(x)$ קיימת כב"מ ב־$[a,b]$.

7 הכללת המשפט היסודי

תזכורת. החלק הראשון של המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי בחלק הראשון אומר: תהי $f(x)$ מוגדרת ואינטגרבילית רימן ב־$[a,b]$. לכל $x\in[a,b]$ נגדיר

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

אזי $F(x)$ רציפה ב־$[a,b]$ ובכל x_0 שבו f רציפה, F' גזירה ומתקיים $F'(x_0)=f(x_0)$.

הכללת לבג. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ מוגדרת ואינטגרבילית לבג. נגדיר לכל $x\in[a,b]$

$$F(x)=\int_a^x fdm$$

אזי F רציפה בהחלט[10] ב־$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)$ קיים ושווה $f(x)$.

[10] יוגדר בהמשך.

7.1 רציפות בהחלט

הגדרה 7.1 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נאמר ש־f רציפה בהחלט ב־$[a,b]$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם הקטעים $[a_k,b_k]\subset[a,b]$ זרים בזוגות עבור $1\le k\le n$ ואם $\sum_{k=1}^n b_k-a_k<\delta$ מתקיים $\sum_{k=1}^n |f(b_k)-f(a_k)|<\epsilon$.

טריוויאלי לראות שרציפות בהחלט גוררת רציפות במידה שווה, אך ההפך **לא תמיד נכון**.

משפט 7.2 (הכללת המשפט היסודי) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ מוגדרת ואינטגרבילית dm. לכל $x\in[a,b]$ נגדיר

$$F(x)=\int_a^x fdm$$

אזי F רציפה בהחלט ב־$[a,b]$.

המטרה הבאה שלנו היא להוכיח שאם $F(x)=\int_a^x fdm$ אז $F'=f$ כב"מ. נסתפק בין היתר על הלמה הבאה.

למה 7.3 תהי $E\subset[a,b]$ קבוצה מדידה כך ש־$m(E)=s>0$. אזי לכל $\epsilon>0$ קיימת **קבוצה סגורה** $F\subset E$ כך ש־$m(F)>s-\epsilon$.

משפט 7.4 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית. נניח שלכל $c\in[a,b]$ $\int_a^c fdm=0$. אזי $f(x)=0$ כב"מ ב־$[a,b]$.[11]

מסקנה 7.5 נניח ש־$f,g:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציות אינטגרביליות ונניח שלכל $c\in[a,b]$

$$\int_a^c fdm=\int_a^c gdm$$

אזי $f(x)=g(x)$ כב"מ ב־$[a,b]$.

משפט 7.6 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ פונקציה אינטגרבילית. לכל $x\in[a,b]$ נגדיר

$$F(x)=\int_a^x fdm$$

אזי $F(x)$ גזירה כב"מ ב־$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)=f(x)$.[12]

[11] כבר הוכחנו זאת עבור $f(x)\ge 0$, אבל פה זה לא נתון.

[12] יש לשים לב שמדובר בשני כב"מים שונים! כלומר, קיימת קבוצה ממידה 0 בה F אינה גזירה, וקיימת קבוצה ממידה 0 שם F' מוגדרת ושונה מ־f.

לסיכום, המשפט הבא מסכם את מה שהוכחנו, הכללת חלק א' למשפט היסודי.

משפט 7.7 (הכללת לבג למשפט היסודי של חשבון אינטגרלי חלק א') תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ אינטגרבילית ונגדיר לכל $x\in[a,b]$:

$$F(x)=\int_a^x fdm$$

אזי F רציפה בהחלט ב־$[a,b]$ וכב"מ $F'(x)$ קיימת ושווה $f(x)$.

כעת נפתח כלים להוכיח את הכללת לבג לחלק השני של המשפט היסודי. הוא הוכיח שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}^*$ רציפה בהחלט אז f' קיים כב"מ ואינטגרבילית ומתקיים

$$\int_a^b f'dm=f(b)-f(a)$$

הערה. אי־אפשר לשפר תוצאה זו, כי אם נכון לכל $c\in[a,b]$ ש־$\int_a^c f'dm=f(c)-f(a)$, ואז בעצם $f(c)$ היא אינטגרל לא מסוים, והיא רציפה בהחלט לפי משפט **7.7**.

כדי להוכיח את המשפט, תחילה נראה שאם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ובהחלט $f'(x)$ קיימת כב"מ ב־$[a,b]$. לצורך זה נשתמש במושג של השתנות חסומה.

אינטואיטיבית, ההשתנות של $f(x)$ בקטע $[a,b]$ היא סכום כל השינויים שלה בערך מוחלט.

7.2 השתנות חסומה

הגדרה 7.8 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נעשה חלוקה P של $[a,b]$:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

ונגדיר את ההשתנות של f ב־P ע"י

$$V(f,P)=\sum_{k=1}^n |f(x_k)-f(x_{k-1})|$$

ההשתנות הכוללת של f ב־$[a,b]$ מוגדרת ע"י

$$T_a^b(f)=\sup_P V(f,P)$$

ואם $T_a^b(f)<\infty$ אומרים ש־f בעלת השתנות חסומה ב־$[a,b]$.

משפט 7.9 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ בעלת השתנות חסומה $\iff$ $f=g-h$ כאשר g ו־h עולות ב־$[a,b]$.

למה 7.10 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נעשה חלוקה

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

אזי

$$T_a^b(f)=\sum_{k=1}^{n}T_{x_{k-1}}^{x_k}(f)$$

משפט 7.11 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט. אזי

$$T_a^b(f)<\infty$$

מסקנה 7.12 אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט, אז $f'(x)$ קיימת כב"מ ומדידה.

מסקנה 7.13 אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט אז f' אינטגרבילית לבג ב־$[a,b]$.

משפט 7.14 תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט, ונניח ש־$f'(x)=0$ כב"מ ב־$[a,b]$. אזי $f(x)$ קבועה ב־$[a,b]$.

משפט 7.15 (הכללת לבג למשפט היסודי חלק ב') תהי $f(x)$ מוגדרת ורציפה בהחלט ב־$[a,b]$. אזי $f'(x)$ קיימת כב"מ ב־$[a,b]$ ואינטגרבילית שם, ומתקיים

$$\int_a^b f'dm=f(b)-f(a)$$

8 משפט לבג

כעת נעבור למשפט לבג, האומר שפונקציה חסומה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן $\iff$ $f(x)$ רציפה כב"מ (dm), ואם כן f אינטגרבילית לבג ומתקיים

$$\underbrace{\int_a^b f(x)dx}_{\textbf{Riemman}}=\underbrace{\int_a^b fdm}_{\textbf{Lebesgue}}$$

חלק IV

מידות מכפלה ומשפט פוביני

9 מידת מכפלה, משפט פוביני וטונלי

נתחיל עם שני ממ"ח $(X,\mathcal{S},u)$ ו־$(Y,\mathcal{T},v)$. נבנה בצורה קנונית מידת מכפלה $w=u\times v$ על σ אלגברה $\mathcal{U}$ של תת־קבוצות של $X\times Y$.

הגדרה 9.1 תהי $E\in\mathcal{S}$ ו־$F\in\mathcal{T}$ קבוצות (מדידות) כלשהן. המכפלה הקרטזית $E\times F\subset X\times Y$ נקראית מלבן מדיד. נגדיר את נפחו ע"י:

$$|E\times F|=u(E)\cdot v(F)$$

ואם אחד המכופלים הוא 0 הנפח הוא 0.

הגדרה 9.2 לכל $E\subset X\times Y$ נגדיר מידה חיצונית:

$$w^*(E)=\inf_{E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}R_n}\sum_{n=1}^{\infty}|R_n|$$

כאשר ה־R_n הם מלבנים מדידים.

הגדרה 9.3 עבור $E\subset X\times Y$ נאמר ש־E *מדידה* אם לכל תת־קבוצה $S\subset X\times Y$ מתקיים:

$$w^*(S)=w^*(S\cap E)+w^*(S\cap E^C)$$

ונגדיר $\mathcal{U}$ להיות אוסף כל הקבוצות המדידות.

משפט 9.4 $\mathcal{U}$ היא σ־אלגברה של תת־הקבוצות של $X\times Y$. $\mathcal{U}$ מכילה כל קבוצה $E\subset X\times Y$ כך ש־$w^*(E)=0$ וכל מלבן מדיד נמצא ב־$\mathcal{U}$, ויתר על כן הצמצום של w^* ל־$\mathcal{U}$ הוא מידה המכונה $w=u\times v$ ולכל מלבן מדיד R מתקיים ש־$w(R)=|R|$.

הגדרה 9.5 קבוצה $E\subset X\times Y$ היא מטיפוס R_σ אם היא איחוד בן מניה של מלבנים מדידים, ו־E מטיפוס $R_{\sigma\delta}$ אם היא חיתוך בן מניה של קבוצות R_σ. אוטומטית כל קבוצה R_σ או $R_{\sigma\delta}$ נמצאת ב־$\mathcal{U}$.

משפט 9.6 אם $E \in R_\sigma$ אז E הוא איחוד זר בן מניה של מלבנים מדידים, ואם $E \in R_{\sigma\delta}$ אז E הוא חיתוך יורד של קבוצות ב־R_σ.

משפט 9.7 נניח ש־$E \in \mathcal{U}$ ו־$w(E) < \infty$. אזי קיים $F \in R_{\sigma\delta}$ ו־$G \in \mathcal{U}$ כך ש־$w(G) = 0$ ו־$F = E \uplus G$ (או $E = F \setminus G$).

משפט 9.8 (משפט פוביני) יהיו $(X, \mathcal{S}, u)$ ו־$(Y, \mathcal{T}, v)$ שני ממ"ח, כאשר u ו־v שלמות. נבנה כנ"ל $(X \times Y, \mathcal{U}, w)$, ונניח ש־$f : X \times Y \to \mathbb{R}^*$ אינטגרבילית dw. אזי,

1. לכמעט כל $x \in X$, הפונקציה $f_x(y) = f(x, y)$ אינטגרבילית dv על Y.
2. לכמעט כל $y \in Y$, הפונקציה $f_y(x) = f(x, y)$ אינטגרבילית du על X.
3. הפונקציה $g(x) = \int_Y f(x, y) dv(y)$ אינטגרבילית du על X.
4. הפונקציה $h(y) = \int_X f(x, y) du(x)$ אינטגרבילית dv על Y.
5. מתקיים:

$$\int_X \left[\int_Y f dv \right] du = \int_{X \times Y} f dw = \int_Y \left[\int_X f du \right] dv$$

הערות.

1. אפשר להראות שאם $v = u =$ מידת לבג על $\mathbb{R}$ אז $w = u \times v$ היא מידת לבג על $\mathbb{R}^2$ ובאינדוקציה אפשר לבנות בדרך זו מידת לבג על $\mathbb{R}^n$.
2. אף על פי שהמשפט נוסח לפונקציות על $X \times Y$ כולו, אפשר להפעיל אותו על $f(x, y)$ מוגדרת באיזה $E \in \mathcal{U}$ ע"י שנמשיך את f להיות 0 ב־E^C.
3. כבר הוכיחו בתרגיל שאם $u =$ מידת הספירה על $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, אז בעצם לפונקציה כלשהי

$$f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$$

אז

$$\int_{\mathbb{N}} f du = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

ואם $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^*$ פונקציה כלשהי היא אינטגרבילית $\iff$ $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס בהחלט, ואם כן

$$\int_{\mathbb{N}} f du = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

אם נפעיל את פוביני ל־$u \times u$ על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ נקבל תוצאה על טורים כפולים: אם

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}| < \infty$$

אז

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

4. יש הכללה של משפט פוביני לפונקציות $f : X \times Y \to [0, \infty]$ שבה אין צורך להניח מראש ש־f אינטגרבילית dw. אבל, משפט זה הוא נכון רק בהנחה נוספת: שהמידות u, v הן סופיות σ.

הגדרה 9.9 יהי $(X, \mathcal{S}, \mu)$ ממ"ח. אומרים ש־u סופית σ אם יש קבוצות $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ ב־$\mathcal{S}$ כך ש־$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ולכל n מתקיים: $\mu(E_n) < \infty$.

למשל, מידת לבג על $\mathbb{R}$ לא מידה סופית כי $m(\mathbb{R}) = \infty$, אבל היא σ סופית כי $\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-n, n)$ ו־$m((-n, n)) = 2n < \infty$.

משפט 9.10 (משפט טונלי) יהיו $(X, \mathcal{S}, u)$ ו־$(Y, \mathcal{T}, v)$ ממ"ח עבור מידות שלימות ו־σ סופיות u ו־v. נניח ש־$f : X \times Y \to [0, \infty]$ מדידה dw. אזי,

1. לכמעט כל x ־ $f_x(y) = f(x, y)$ מדידה $\mathcal{T}$.
2. לכמעט כל y ־ $f_y(x) = f(x, y)$ מדידה $\mathcal{S}$.
3. $g(x) = \int_Y f(d, y) dv(y)$ מדידה $\mathcal{S}$.
4. $h(y) = \int_X f(x, y) du(x)$ מדידה $\mathcal{T}$.
5. מתקיים:

$$\int_X \left[\int_Y f dv \right] du = \int_{X \times Y} f dw = \int_Y \left[\int_X f du \right] dv$$

חלק V

מבוא לאנליזה פונקציונלית

10 מרחבים נורמים ומרחבי בנך

הגדרה 10.1 יהי X מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. *נורמה על* X היא פונקציה

$$\|\cdot\|: X \to [0,\infty]$$

כך שלכל $x,y\in X$ ו־$\alpha\in\mathbb{F}$ מתקיים:

1. $0 \leq \|x\|$ עם שיוויון רק עבור $x=0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\cdot\|x\|$.
3. $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ (אי־שיוויון המשולש).

הזוג $(X,\|\cdot\|)$ נקרא מרחב *נורמי*.

הערות פשוטות.

1. במרחב נורמי $\|x\| = \|x-0\| = dist(x,0)$.
2. המטריקה במרחב נורמי שמורה תחת הזזה. ז"א, אם $x,y,z\in X$, אז:

$$dist(x+z,y+z) = \|(x+z)-(y+z)\| = \|x-y\| = dist(x,y)$$

ברגע שיש מטריקה, יש מושג של התכנסות של סדרות, גבולות וכו'.

הגדרה 10.2 יהי $(X,\|\cdot\|)$ מרחב נורמי, ותהי $\{x_n\}$ סדרה של נקודות ב־X. עבור $x_0\in X$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

אם לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $n>n_0$

$$\|x_n-x_0\| = d(x_n,x_0) < \epsilon$$

סדרה $\{x_n\}$ ב־X נקראית סדרת קושי אם לכל $\epsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שאם $m,n>n_0$ אז $\|x_m-x_n\|<\epsilon$.

10.1 מרחבי L^p ו־ℓ^p

הגדרה 10.3 יהי $(X,\mathcal{S},\mu)$ ממ"ח. עבור $1\leq p<\infty$ מגדירים $L^p(d\mu)$ להיות אוסף כל הפונקציות המדידות $f: X\to\mathbb{R}^*\ (\mathbb{C}^*)$ כך ש־

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

הערה. נאמר ש־$f: X\to\mathbb{C}^*$ היא מדידה אם $f=u+iv$ כאשר u,v מדידות $\mathcal{S}$. כמו כן,

$$\int_X f d\mu = \int_X u d\mu + i\int_X v d\mu$$

נעיר שאם $f(x)\equiv 0$ כב"מ $d\mu$ אז

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

אף על פי ש־$f\neq 0$, בסתירה לתכונה הראשונה של נורמה. פתרון לבעיה זו הוא לומר ששתי פונקציות $f,g\in L^p$ שקולות אם $f(x)=g(x)$ כב"מ. ז"א, "פונקציות" ב־L^p הן באמת מחלקות שקילות של פונקציות.

למה 10.4 יהיו $a,b\geq 0$, ויהי $0<\lambda<1$. אזי,

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda)b$$

עם שיוויון רק עבור $a=b$.

הערה. עבור $\lambda=\frac{1}{2}$ הלמה אומרת כי $\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}$ וזה דבר ידוע.

משפט 10.5 (אי־שיוויון הולדר) נניח ש־$1<p<\infty$. נגדיר q כך ש־$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, ז"א $pq=p+q$ או $q=\frac{p}{p-1}$ וגם $1<q<\infty$. כעת, אם $f\in L^p(d\mu)$ ו־$g\in L^q(d\mu)$ אז $fg\in L^1(d\mu)$ ומתקיים

$$\|fg\|_1 = \int_X |fg| d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q$$

ויש שיוויון $\iff$ קיימים קבועים α,β כך ש־$\alpha|f(x)|^p=\beta|g(x)|^q$ כב"מ.

הגדרה 10.6 עבור $1 < p,q < \infty$ אומרים ש־p ו־q חזקות צמודות אם $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. מקרה פרטי של כך הוא $p=q=2$, ובמקרה זה אי־שיוויון הולדר הוא אי־שיוויון קושי־שוורץ.

משפט 10.7 (אי־שיוויון מינקובסקי = אי־שיוויון המשולש ב־L^p) יהיו $f,g \in L^p(d\mu)$. אזי

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

עם שיוויון $\iff$ $f(x)=cg(x)$ או $g(x)=cf(x)$ כב"מ כאשר c קבוע.

נחבר את כל החלקים ־ הוכחנו שעבור $1 < p < \infty$ המרחב $L^p(d\mu)$ הוא מרחב נורמי, ולגבי $L^1(d\mu)$ אי־שיוויון המשולש טריוויאלי, ולכן גם $L^1(d\mu)$ מרחב נורמי.

הערה. אפשר להגדיר $L^p(d\mu)$ גם עבור $0 < p < 1$ אבל אז הביטוי $\left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ אינה נורמה.

גם מגדירים את $L^\infty(d\mu)$ להיות (מחלקות שקילות של) פונקציות מדידות וחסומות בעיקר[13]. הנורמה היא:

$$\|f\|_\infty = \inf\{\lambda \ge 0 : \mu\{x\in X : |f(x)| > \lambda\} = 0\} =$$

$$= \sup\{\lambda \ge 0 : \mu\{x\in X : |f(x)| > \lambda\} > 0\} = \inf_{g\sim f} \sup\{|g(x)| : x \in X\}$$

כאשר $f \sim g$ אומר $f(x)=g(x)$ כב"מ $(d\mu)$. זה תרגיל קל להוכיח ש־L^∞ מרחב נורמי.

מקרה פרטי חשוב. ניקח μ להיות מידת הספירה על $\mathbb{N}$. במקרה זה, $L^p(d\mu)$ הוא מרחב של סדרות, שקרוי ℓ^p. עבור $1 \le p < \infty$ וסדרה $x=(x_n)_{n=1}^\infty$ מתקיים

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ועבור $p=\infty$

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

ומתקיים כי סדרה שייכת למרחב $\iff$ הנורמה שלה סופית.

[13] Essentialy Bounded Functions.

נשים לב כי אי־שיוויון הולדר לסדרות אומר:

$$\sum_{n=1}^\infty |a_n b_n| \le \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

כאשר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. אי־שיוויון מינקובסקי לסדרות אומר כי עבור $1 \le p < \infty$

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n+b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^\infty |b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

כעת, המשימה הבאה היא להוכיח שמרחבי L^p שלמים. נצטרך הכנה לזה.

משפט 10.8 מרחב נורמי X הוא שלם $\iff$ כל טור ב־X שמתכנס בהחלט מתכנס. ז"א, טור $\sum_{n=1}^\infty x_n$ ב־X מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$ ונוכיח שזה גורר התכנסות של הטור עצמו בנורמה של X.

משפט 10.9 עבור $1 \le p \le \infty$ המרחבים $L^p(d\mu)$ שלמים.

הערה 10.10 (מתוך ההוכחות)

אם $f_n \to f$ ב־L^p ו־$1 \le p < \infty$ אז יש תת־סדרה $f_{n_k} \to f$ כב"מ ב־X.

10.2 טרנספורמציות ליניאריות

הגדרה 10.11 יהיו X,Y שני מרחבים נורמים מעל שדה $\mathbb{F}$. טרנספורמציה (או אופרטור) ליניארי $T: X \to Y$ היא טרנספורמציה המקיימת:

$$T(x_1+cx_2) = T(x_1)+cT(x_2)$$

קל להוכיח שכל טרנספורמציה ליניארית $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$ רציפה בנורמה האוקלידית. במרחבים נורמים ממימד ∞ יש הרבה דוגמאות של טרנספורמציות ליניאריות ולא רציפות.

הגדרה 10.12 יהיו X,Y מרחבים נורמים מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T: X \to Y$ ליניארית. נגדיר את הנורמה של T ע"י

$$\|T\| = \sup_{0\ne x\in X} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_Y$$

כאשר השיוויון השני מושאר כתרגיל. אם $\|T\| < \infty$ אומרים ש־T חסומה אם $\|T\| = M < \infty$ אז לכל $x \in X$: $\|Tx\| \leq M\|x\|$.

משפט 10.13 יהיו X, Y מרחבים נורמים מעל $\mathbb{F}$, ותהי $T : X \to Y$ טרנספורמציה ליניארית. אזי, הטענות הבאות שקולות.

1. T חסומה.
2. T רציפה במ"ש על כל X.
3. T רציפה בנקודה אחת $x_0 \in X$.
4. T רציפה באפס.

11 מרחבי מכפלה פנימית ומרחבי הילברט

הגדרה 11.1 מכפלה סקלרית (מכפלה פנימית) על מרחב וקטורי X היא פונקציה $(,) : X \times X \to \mathbb{F}$ כך שלכל $x, y, z \in X$ ו־$\alpha \in \mathbb{F}$, מתקיים:

1. $(y, x) = \overline{(x, y)}$.
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$.
4. $(x, x) \geq 0$ עם שוויון רק עבור $x = 0$.

מסקנה 11.2 תוצאות מיידיות להגדרה הן:

1. בעזרת סעיפים 1 ו־2 $\Longleftarrow$ $(z, x + y) = (z, x) + (z, y)$.
2. בעזרת 1 ו־3 $\Longleftarrow$ $(x, \alpha y) = \overline{\alpha}(x, y)$.
3. לכל $x \in X$, $(x, 0) = (0, x) = 0$, וזה נובע מ־3.

הגדרה 11.3 X יחד עם מכפלה פנימית $(,)$ נקרא מרחב מכפלה פנימית, ממ"פ.

הגדרה 11.4 יהי X ממ"פ. לכל $x \in X$ נגדיר $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$. הוכיחו כבר באלגברה ליניארית שזאת נורמה אמיתית.

משפט 11.5 (אי־שיוויון קושי שוורץ) יהי X ממ"פ. אזי לכל $x, y \in X$:

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

מסקנה 11.6 מן המשפט לעיל נובע $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.[14]

הערה 11.7 תוך כדי ההוכחה ראינו דבר שימושי:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\text{Re}(x, y)$$

הערה נוספת היא כי המכפלה הפנימית **רציפה** במובן זה שאם $x_n \to x, y_n \to y$ בתוך X אז $(x_n, y_n) \to (x, y)$. ההוכחה תרגיל.

משפט 11.8 (משפט המקבילית) יהי X מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $x, y \in X$ וקטורים. אזי,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

מה שיפה במשפט **11.8** הוא שזו טענה רק על הנורמה, אבל ההוכחה תלויה באופן עקרוני בזה שהנורמה מושרית ע"י מכפלה פנימית. נובע מיד שאם Y מרחב נורמי שבו משפט המקביליות אינו נכון, אז אי־אפשר להגדיר על Y מכפלה פנימית שתשרה את הנורמה. **גם ההפך נכון:** אם משפט **11.8** מתקיים ב־Y אז אפשר להגדיר על Y מכפלה פנימית שמשרה את הנורמה.

הגדרה 11.9 מרחב מכפלה פנימית שלם[15] נקרא מרחב הילברט.

הערה. עבור $p \neq 2$ $L^p(d\mu)$ (וגם $L^\infty(d\mu)$) אינם מרחבי הילברט, וקל לבדוק שבהם משפט **11.8** נכשל. גם $C(K)$ לא מרחב הילברט.

משפט 11.10 יהי H מרחב הילברט ויהי $M \subset H$ תת־מרחב סגור. אם $x \in H \backslash M$, אז קיים $y \in M$ יחיד כך ש־$\|x - y\|$[16] מינימלי מתוך

$$\{\|z - x\| : z \in Y\}$$

[14] אי־שיוויון המשולש.

[15] במטריקה המושרית ע"י הנורמה.

[16] השווה ל־$\text{dist}(x, y)$.

ויתר על כן $x-y$ אורגוגונלית ל־M במובן שלכל $z\in M$:

$$(x-y,z)=0$$

משפט 11.11 (משפט ההצגה של ריס) יהי H מרחב הילברט ויהי $y\in H$ וקטור כלשהו. נגדיר $f_y : H\to\mathbb{F}$ ע"י $f_y(x)=(x,y)$. אזי f_y ליניארי וחסום ומתקיים

$$\|f_y\|=\|y\|_H$$

ולהיפך: אם $f : X\to\mathbb{F}$ ליניארי וחסום אז קיים $y\in H$ יחיד כך ש־$f=f_y$.

11.1 משפט רדון ניקודים

נחזור לתורת המידה. נניח ש־$(X,\mathcal{S})$ מרחב מדיד ו־μ מידה על $(X,\mathcal{S})$. כבר ראינו שלכל $f\geq 0$ מדידה $\mathcal{S}$ ההגדרה

$$\nu(E)=\int_E f d\mu$$

מגדירה מידה חדשה ν על $(X,\mathcal{S})$. נעיר שאם $E\in\mathcal{S}$ מקיימת $\mu(E)=0$ אז בהכרח

$$\nu(E)=\int_E f d\mu=0$$

הגדרה 11.12 יהיו μ,ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$. אומרים ש־ν רציפה בהחלט ביחס ל־μ[17] אם לכל $E\in\mathcal{S}$ כך ש־$\mu(E)=0$ גם $\nu(E)=0$.

לעיל הוכחנו שאם $\nu(E)=\int_E f d\mu$ אז $\nu\ll\mu$.

משפט 11.13 (רדון ניקודים) יהי $(X,\mathcal{S})$ מרחב מדיד, ויהיו μ,ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$ שהן σ סופיות, ו־$\mu\gg\nu$. אז קיים $f\geq 0$ מדידה $\mathcal{S}$ כך שלכל $E\in\mathcal{S}$,

$$\nu(E)=\int_E f d\mu$$

הגדרה 11.14 יהיו μ ו־ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$. נאמר שהן סינגולריות הדדית[18], ומסומן $\mu\perp\nu$ אם $X=E_1\uplus E_2$, ושתיהן מדידות ו־

$$\mu(E_1)=\nu(E_2)=0$$

(ובמילים: μ "חי" על E_2 ו־ν "חי" על E_1)

משפט 11.15 (משפט הפירוק של לבג) יהיו μ ו־ν שתי מידות על $(X,\mathcal{S})$ שהן σ סופיות. אזי קיים פירוק $\nu=\nu_a+\nu_s$ כאשר $\nu_a\ll\mu$ ו־$\nu_s\perp\mu$ וגם $\nu_a\perp\nu_s$.

המתמטיקאי המפורסם פון ניומן מצא הוכחה לשני המשפטים הנ"ל ביחד עפ"י משפט ההצגה של ריס.

[17] מסומן $\nu\ll\mu$.

[18] באנגלית Mutually Singular.