78

⑥⑤③②①

מחברת מס' ____
מתוך ____ מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

תאריך הבחינה 1/4/08

שם הקורס חדו"א 1

שם המורה פרופ' יונתן אהרונסון

החוג/המגמה מתמטיקה-פיזיקה

מס' זיהוי (העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

3 0 1 0 8 0 4 0 4

03661101011
301080404 78

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 86

המחברת נבדקה ביום

חתימת המורה

82

120455

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקה בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

① 20/20

③ 9/20

⑤ 15/20

④ 20/20

② 18/20

בחרתי לענות על שאלות
① ② ③ ⑤ ⑥

מבחן בחדו"א 1

1) א) טענה: קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $e^x+x^3+\sin x=0$

⇐ נכון! על מנת להוכיח טענה זו, נגדיר פונ' $f(x):=e^x+x^3+\sin x$, אם נוכיח כי קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x)=0$ אזי הוכחנו את הטענה. (נשים לב כי תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $\mathbb{R}$).

נבחן $x=0$ נשים לב כי מתקיים: $f(0)=e^0+0^3+\sin 0=1>0$

נבחן $x=-\frac{\pi}{2}$ נשים לב כי מתקיים:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{e^{\pi/2}}+\left(-\frac{\pi}{2}\right)^3+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\underbrace{\frac{1}{e^{\pi/2}}}_{<1}-\frac{\pi^3}{8}-1<0$$

בנוסף, פונקציה $f(x)$ הינה הרכבה וחיבור של פונ' רציפות, ולכן גם היא רציפה.

עתה, מתקיימים כל התנאים של משפט ערך הביניים (f רציפה, וקיים x כך ש- $f(x)>0$ וגם קיים x' כך ש- $f(x')<0$) ולכן קיים x'' כך שמתקיים $f(x'')=0$!

ולכן הוכחנו שקיים $x\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים $e^{x''}+(x'')^3+\sin(x'')=0$

מ.ש.ל

ב) טענה: $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}1$.

⇐ נכון!

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n^2}\cdot n}=\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}\quad (*)$$

נשים לב כי בביטוי הפנימי שקיבלנו ב-(*) ישנה סדרה $\left(1+\frac{1}{k}\right)^k_{k\to\infty}$ וידוע כי היא מתכנסת ל- e (גבול סופי). לכן, לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל לפיכך:

$$(*)=\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{1/n}\xrightarrow{n\to\infty}e^0=1$$

3) טענה: אם $a,b>0$ אזי $(a^n+b^n)^{1/n}\xrightarrow{n\to\infty}a+b$.

⇐ לא נכון! מכיוון שהביטוי סימטרי יחסית ל- a,b ניתן להניח בלי הגבלת הכלליות כי $a\geq b$, ונשים לב כי מתקיים:

$$a=\sqrt[n]{a^n}\leq\sqrt[n]{a^n+b^n}\leq\sqrt[n]{2a^n}=\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{a^n}=\sqrt[n]{2}\cdot a\to a$$

(*) $\sqrt[n]{2}\xrightarrow{n\to\infty}1$ (הסתמכנו גם באריתמטיקה של גבולות)

(*) לכן, לפי סנדוויץ' נקבל כי $(a^n+b^n)^{1/n}\xrightarrow{n\to\infty}a$ בסתירה לטענה!

אוניברסיטת תל-אביב אוניברסיטת תל-אביב אוניברסיטת תל-אביב

$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 1$

5) c) הוכח כי אם $x>1$ אזי $1 \overset{**}{<} \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \overset{*}{<} x$.

<u>נוכיח את</u> $*$: צ"ל כי $x > \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right) \Leftarrow$

$$x-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)>0$$

נראה כי שקולה לטענה, שאם נגדיר פונ׳ $f(x)=x-\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$ אזי $f(x)>0$ $\forall x>1$.

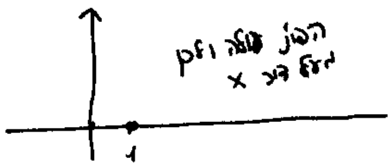
נחקור את הפונ׳. נשים לב כי כאשר $x=1$ מתקיים: $f(1)=0$.

נגזור את הפונ׳. נשים לב כי עבור $x=1$ מתקיים: $f'(1)=0$

$$f'(x)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

ונשים לב כי עבור $x>1$ $f'(x)\geq 0$. מכיון שהנגזרת גדולה מ-0 לכל $1<x$, אזי הפונ׳ <u>עולה</u> לכל $1<x$, כלומר מתקיים: $f(x)>0$ לכל $x>1$.

ולכן מתקיים: $x>\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)$.



<u>נוכיח את</u> $**$: נראה כי שקולה לטענה, שאם נגדיר פונ׳ $g(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-1$

אז $g(x)>0$ $\forall x>1$. נחקור את הפונ׳. נשים לב כי מתקיים עבור $x=1$

$$g(1)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)-1=\frac{1}{2}\cdot 2-1=1-1=0$$

$$g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}-1$$

נגזור את הפונ׳.

$$g'(x)=\frac{1}{2}+\left(+[2x]^{-1}\right]'=\frac{1}{2}-1(2x)^{-2}\cdot 2=\frac{1}{2}-\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{4x^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2x^2}$$

עתה, כבר הוכחנו ב-$*$ כי נגזרת זאת גדולה מ-0 לכל $1<x$. ולכן באותו עיון, הפונ׳ <u>עולה</u> לכל $1<x$ (כלומר אינה יורדת ולכן לא יכולה לחתוך את ציר x כיון שהיא מתחילה מ-$g(1)=0$).

ש.ב.נ

$1, \left(\frac{1}{2}\left[1+1\right]\right)$ 1

$0.25 + 0.16 = 0.41$ $\quad \alpha < 1$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+2\right], \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4}+\frac{4}{5}\right)$

2.5

$\frac{5}{2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

$\frac{25+16}{2 \cdot 20} = \frac{41}{40}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{1}+\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x}{e^x - 1 - x} = \frac{x\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)}{x\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - 1\right)} = \frac{\frac{\sin x}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} \to 0$$

$\infty \quad 0 \quad \infty \quad 0 \quad 0$

$e^x \quad x^2$

$$\frac{\frac{\sin x}{e^x} - \frac{x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}} = 0$$

$1 \quad 0 \quad 0$

$$\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = \text{"}1^\infty\text{"} = e^{n \ln\left[\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]} =$$

$$= e^{\frac{\ln\left[\cos\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right]}{\frac{1}{n}}}$$

$\to 0 \quad \frac{1}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}} \quad \to 0$

(5) (ב) $a_1 = x > 0$ $\quad a_{n+1}(x) := \frac{1}{2}\left[a_n(x) + \frac{1}{a_n(x)}\right]$

יהי $x>1$ הוכח כי קיים הגבול $\lim_{x\to\infty} a_n(x)$ וחשב אותו.

נוכיח כי הסדרה מונוטונית יורדת: נוכיח זאת באינדוקציה.

בסיס: נתון כי $x>1$ ולכן $a_1(x) = x$

$$a_2(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = \frac{x^2+1}{2x} < x$$

הוכחנו בסעיף א׳ ✓

הנחת האינדוקציה: נניח כי $\boxed{a_{n+1} < a_n}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n(x) + \frac{1}{a_n(x)}\right) < a_n(x) \Rightarrow (a_n(x)) + \frac{1}{a_n(x)} < 2a_n(x)$$

$$\Rightarrow (*) \quad \frac{1}{a_n(x)} < a_n(x) \quad / \cdot a_n(x) > 0$$

$1 < a_n^2(x)$ הנחת האינדוקציה

הוכחה: נוכיח כי $a_{n+2} < a_{n+1}$.

$$a_{n+2} = \frac{1}{2}\left(a_{n+1}(x) + \frac{1}{a_{n+1}(x)}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}^2(x)+1}{a_{n+1}(x)}\right)$$

המשך [illegible] (*)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}^2(x)+1}{a_{n+1}(x)}\right) < \frac{1}{2}\left[\frac{2a_{n+1}^2(x)}{a_{n+1}(x)}\right] = a_{n+1}(x)$$

$a_{n+1}(x)^2 > 1$

~~ולכן הוכחנו:~~ $\cancel{a_{n+2} < a_{n+1}}$

המשך 5 ב: בסעיף א' הוכחנו כי $\forall x>1$ הסדרה חסומה מלרע ע"י 1.

ולכן עפ"י משפט, סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע מתכנסת!

(עפ"י קושי, המרחק בין a_n ל-a_{n+1} הוא קטן מאפסילון כרצוננו כש-$n \to \infty$.)

נחשב את הגבול:

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right) / \cdot 2L$$

$$2L^2 = L^2 + 1 \Rightarrow L^2 - 1 = 0 \Rightarrow (L-1)(L+1) = 0$$

$L=-1$ נפסל כיוון שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ע"י 1. (הערך 1- לא הגיוני)

$L=1$ היינו הגבול של הסדרה.

ג) האם קיים הגבול $\lim_{n \to \infty} a_n\left(\frac{3}{4}\right)$?

כן! נכונה:

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3\cdot 3 + 4\cdot 4}{12}\right) = \frac{9+16}{24} = \frac{25}{24} > 1$$

קל לראות כי $a_2\left(\frac{3}{4}\right) > 1$ ולכן החל מאיבר זה, מתקיימים כל התנאים של סעיף ב' ולכן הגבול קיים. זאת, מכיוון שהגבול של סדרה אינו תלוי כמות סופית של איברים בתחילת הסדרה.

המשך: ✱

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_{n+1}^2(x)+1}{a_{n+1}(x)}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{4}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 + 1}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{1}{4}\left(a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2}\right) + 1}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a_n^2} + 1}{\frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}}\right] = \frac{\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4a_n^2} + 1}{\frac{a_n}{4} + \frac{1}{2a_n}} =$$

$$= \frac{\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{4a_n^2} + 1.5}{\frac{2a_n^2 + 4}{8a_n}} = \frac{\left(\frac{a_n^2}{4} + \frac{1}{4a_n^2} + 1.5\right) 8a_n}{4} = 2a_n^3 + 2a_n^2 + 12 > a_n$$

כיוון ש $a_n^2 > 1$

נכון עפ"י הנחת האינדוקציה!

15 לא הבנתי את ההיגיון של מה שרצית להוכיח!!

-5

2 א

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x - x}{e^x-1-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{e^x} - \frac{x}{e^x}}{\frac{e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x}} = \frac{0}{1} = 0$$

עפ"י אריתמטיקה של גבולות!

עתה, נשים לב כי מתקיים:

I $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{e^x} = 0$ כיוון ש $\sin(x)$ חסום ומתקיים $0 \xleftarrow[x\to\infty]{} -\frac{1}{e^x} \le \frac{\sin x}{e^x} \le \frac{1}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

II $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = 0$ (*) $\Rightarrow$ (*) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = "\frac{\infty}{\infty}" \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$

III $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0$, $\frac{e^x}{e^x} = 1 \quad \forall x$

~~[illegible]~~

2 ב

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$$

a קבוע

נמצא את הגבול ע"י כך שנגדיר פונ' $g(x) = \left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x$.

נמצא $\lim_{x\to\infty} g(x)$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)}$$

הפונ' $g(x)$ הינה הרכבה נמנה של פונ' רציפות ולכן גם היא רציפה, ולכן עפ"י רציפות מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty} x\ln\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)} \quad (*)$$

$$(*)\ \lim_{x\to\infty} x\ln\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left[\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right]}{\frac{1}{x}} = "\frac{0}{0}" \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}}\cdot\left(+\sin\frac{a}{\sqrt{x}}\right)\cdot\left(+\frac{1}{2}\right)x^{-1.5}\cdot a}{-x^{-2}} =$$

$$= -\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\cdot\frac{1}{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}}\cdot\sin\frac{a}{\sqrt{x}}}{x^{3/2}\cdot 2} = -\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}}\cdot\sin\frac{a}{\sqrt{x}}}{2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}}\cdot\sin\frac{a}{\sqrt{x}}}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}} = "\frac{0}{0}" \overset{\text{לופיטל}}{=}$$ ~~[illegible]~~

המשך מאחורי הדף

~~המשך 2 ב~~

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}ax^{-1.5}\cdot\sin\frac{a}{\sqrt{x}}\cdot\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{-2}+1}{-x^{-1.5}}=$$

$$\overset{\Theta}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}a\sin\frac{a}{\sqrt{x}}\left(\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^{-2}+x^{3/2}=\infty$$

~~ולכן עפ"י היינה לכל [x] ...~~

המשך 2 ב

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a}{\sqrt{x}}}\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1.5}+\sin\frac{a}{\sqrt{x}}\cdot(-1)\left[\cos\frac{a}{\sqrt{x}}\right]^{-2}\cdot a\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1.5}}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-1.5}}=$$

אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left[a-\frac{\overset{0}{\sin\frac{a}{\sqrt{x}}}\cdot a}{\underset{1}{\cos^2\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)}}\right]=\frac{1}{2}a$$

עתה, עפ"י היינה לכל סדרה של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ תגיע את אותו גבול, כבר, הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

נשים לב כי בסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ x היה קבוע, ובגלל ש-a היינו קבוע.

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^{n}=\frac{1}{2}x$$

~~$a_n=[x]$ ...~~

עפ"י היינה, כל סדרה של $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ תתכנס לאותו גבול, ובפרט הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $=1,2,\ldots$

שיקול חישוב -2

3 ב האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ מתכנס?

כן! נימוק טוב → לא נכון. -1

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

נפעיל את מבחן המנה על הטור. נסמן $a_n=\binom{3n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$a_n=\frac{(3n)!}{(2n)!\,(n)!\,3^n}$$

$$\cancel{\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(3n+3)!}{3n}}$$

$$a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!\,(n+1)!\,3^{n+1}}\cdot\frac{(2n)!\,(n)!\,3^n}{(3n)!}=\frac{\cancel{(3n)!}(3n+1)(3n+2)(3n+3)\cancel{(2n)!}\cancel{(n)!}\cancel{3^n}}{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)\cancel{(n)!}\cancel{3^n}\cdot 3\cdot\cancel{(3n)!}(n+1)}$$

$$=\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(2n+1)(2n+2)\cdot 3}=\frac{(9n^2+6n+3n+2)(3n+3)}{(4n^2+4n+2n+2)\cdot 3\cdot(n+1)}=$$

$$=\frac{27n^3+18n^2+9n^2+6n+27n^2+27n+6}{(12n^2+18n+6)(n+1)}=\frac{27n^3+54n^2+33n+6}{(12n^2+18n+6)(n+1)}$$

$$\cancel{=\frac{27+\frac{54}{n}+\frac{33}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{\frac{12}{n}+\frac{21}{n^2}+\frac{6}{n^3}}}$$

~~ולכן עפ"י מבחן המנה הטור מתבדר!~~

$$=\frac{27n^3+54n^2+33n+6}{12n^3+18n^2+6n+12n^2+18n+6}=\frac{27+\frac{54}{n}+\frac{33}{n^2}+\frac{6}{n^3}}{12+\frac{18}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{12}{n}+\frac{18}{n^2}+\frac{6}{n^3}}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{אריתמטיקה של סדרות}}\frac{27}{12}$$

ולכן הטור מתבדר (עפ"י מבחן המנה)!

מבחן המנה קובע כי אם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ אזי. אם $q>1$ הטור מתבדר

ועם $q<1$ הטור מתכנס.

~~3 א) יהי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ טור מתכנס.~~

~~ניתן לרשום טור כסדרה מתכנסת, כלומר:~~

~~$\forall \varepsilon>0 \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon$~~

~~$\Rightarrow |a_1+a_2+a_3+\dots+a_{N_\varepsilon} - L| < \varepsilon$~~

~~לכל $1 \le N$:~~

~~$|a_N+a_{N+1}+\dots+a_{N_\varepsilon} - L| \le$~~

3 א) (1) נשתמש במבחן השוואה.

נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

$$\sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_k|$$

אזי ע"פ מבחן השוואה, הטור $\sum_{k=N}^{\infty} |a_k|$ הוא שווה טור שמתכנס.

ומכיוון שהתכנסות טור בערך מוחלט גוררת התכנסות טור,

אזי גם הטור $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ מתכנס.

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ לא

הגדרה נתונה !

(אבל) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס (ם)

$\Rightarrow$ ~~$\sum_{k=N+1} |a_k|$~~

מתכנס.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

מתבדר

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \frac{1}{k}$$

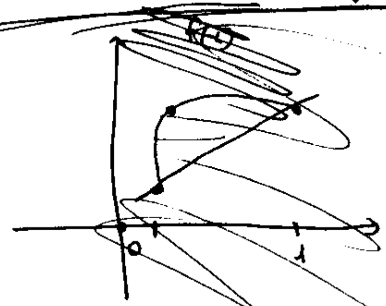
(I) $f(1) > f(0)+1$

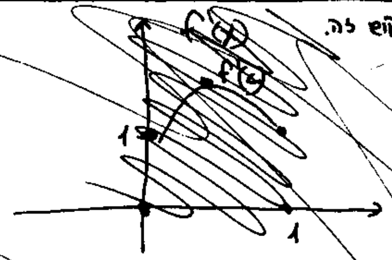
6) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות, מקיימת

! $f'(0)=f'(1)=1$. (גזירה גוררת רציפות עפ"י משפט שהוכחנו בכיתה.)

א) הוכח כי קיים $c\in(0,1)$ כך ש $f'(c)>1$.

(א) לא להתייחס לקטע זה





עפ"י לגרנז' קיימת נקודה C כך ש: $[0<c<1]$

(f(x) רציפה ב $[0,1]$ כנ"ל, וגזירה ב $(0,1)$ כנ"ל)

עפ"י נתון (I)

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1}=f(1)-f(0)>1$$

ב) הוכח כי קיימות $0<\partial_1<\partial_2<1$ כך ש $f''(\partial_1)>0>f''(\partial_2)$.

נתבונן על $f'(x)$ רציפה. ולכן, עפ"י לגרנז' קיימת נקודה ∂_1 כך ש: (וגזירה בקטע)

$$f''(\partial_1)=\frac{f'(c)-f'(0)}{c-0}>0$$

כיון שלפי סעיף א' ⇐ $f'(c)>1$

ונתון כי ⇐ $f'(0)=1$

וכיון ש $c-0>0$ (כיון ש $0<c<1$)

שוב עפ"י לגרנז' $f'(x)$ רציפה וגזירה בקטע ולכן קיימת נקודה ∂_2 כך ש:

$$f''(\partial_2)=\frac{f'(1)-f'(c)}{1-c}<0$$

כיון ש $f'(1)=1$, $f'(c)>1$, $1-c$ חיובי!

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב

<u>המשך</u> (6) (ג) האם קיימת נקודה $p\in(0,1)$ כך ש $f''(p)=0$?

כן נוכיח נכונות.

נתון כי הנגזרת $f'(x)$ רציפה ב $[0,1]$ וגזירה ב $(0,1)$, ומקיימת $f'(0)=f'(1)$

ולכן מקיימת את כל תנאי משפט רול. <u>לכן</u>, עפ"י רול נובע כי קיימת נקודה $p\in(0,1)$ כך ש $f''(p)=0$.

(3)

$$\frac{(3n)!}{(2n)!\,(n)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

מבחן מנה

$$\frac{(3n+1)!}{(2n+1)!\,(n+1)!\,3^{n+1}}\cdot\frac{(2n)!\,(n)!\,3^n}{(3n)!}=\frac{\cancel{(3n)!}(3n+1)\cancel{(2n)!}\cancel{(n)!}\cancel{3^n}}{\cancel{(2n)!}(2n+1)\cancel{(n)!}(n+1)3\cdot\cancel{3^n}\cancel{(3n)!}}$$

$$=\frac{(3n+1)}{3(n+1)(2n+1)}=\frac{3n+1}{3(2n^2+n+2n+1)}=\frac{3n+1}{6n^2+9n+1}=$$

$$=\frac{\frac{3n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}{\frac{6n^2}{n^2}+9\frac{n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=0<1$$

ולכן מתכנס

(5)

$$1<\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)<x$$

$$x\overset{?}{>}\left(\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\Rightarrow f=x-\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\overset{?}{>}0$$

$$-(2x)^{-1}$$

$$f'=1-\frac{1}{2}-(-1)(2x)^{-2}(2)=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{2}{4x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x^2}$$

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$\frac{\sin x-x}{e^x-1-x}$$

$e^x + x^3 + \sin x = 0$

$e^{\frac{1}{\pi/2}} \quad -\frac{\pi^3}{8} \quad -1$

< 1

$x = -\frac{\pi}{2}$

① א

נכון

$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{n}{n^2}}$

$e^{\frac{1}{n^2}} \to 0$

$= 1$

נכון

ב

ג

לא נכון

בה"כ $a \ge b$

$(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n+b^n} \le \sqrt[n]{2a^n} = a$

$a = \sqrt[n]{a^n} \le$

③

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x}{e^x - 1 - x} = \frac{x\sin x}{x} - x$

א ②

ב

(3א)

בית הדפוס

אוניברסיטת תל-אביב