חקירה פונקציות/טורים/טורי חֲזָקוֹת

יובל בר

30.06.2022

1 פונקציות

הגדרה 1. סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **מתכנסת נק'** ל$f(x)$ ב - I אם:

$$\forall_{x_0\in I}\forall_{\varepsilon>0}:\exists_{N_{x_0,\varepsilon}\in\mathbb{N}}:\forall_{n\geq N_{x_0,\varepsilon}}:|f_n(x_0)-f(x_0)|\leq\varepsilon$$

הערה. נשים לב שאנחנו בוחרים N שתלוי בx_0 ובε, כלומר לכל x_0 אנחנו צריכים לבחור $N_{x_0,\varepsilon}$ עבורו.

במידה ו$N_{x_0,\varepsilon}$ אינו תלוי ב-x_0 אלא רק בε נאמר שסדרת הפונקציות **מתכנסת במ"ש(במידה שווה)**.

הגדרה 2. סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **מתכנסת במ"ש** ל$f(x)$ ב - I אם:

$$\forall_{\varepsilon>0}:\exists_{N_\varepsilon\in\mathbb{N}}:\forall_{n\geq N_\varepsilon}\forall_{x_0\in I}:|f_n(x_0)-f(x_0)|\leq\varepsilon$$

נסמן התכנסות במידה שווה:

$$f_n(x)\rightrightarrows f(x)$$

הערה. התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נק', לא להיפך.

משפט 3. $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל$f(x)$ ב - I $\iff$ הסדרה $\varepsilon_n:=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ מתכנסת ל0.

משפט 4. אם $f_n(x)$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסות במ"ש ל$f(x)$ אזי גם $f(x)$ רציפה.

כלומר (בהנחה ש$f_n(x)$ רציפות), אם $f(x)$ אינה רציפה, אזי $f_n(x)$ אינה מתכנסת במ"ש ל$f(x)$.

משפט 5. אם $f(x)\underset{n\to\infty}{\searrow}f_n(x)$ בקטע סגור $[a,b]$ ו$\forall_{n\in\mathbb{N}}f_n(x),f(x)$ רציפות בו, אזי ההתכנסות היא במ"ש.

2 טורים

הגדרה 6. עבור טור פונקציות

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

המתכנס לכל נקודה $x \in I$, נסמן את פונקציית הסכום החלקי ואת פונקציית הסכום

$$\sum_{n=1}^{k} f_n(x) = s_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

הטור מתכנס נק' $\iff$ $s_n(x)$ מתכנסת נק'
הטור מתכנס במ"ש $\iff$ $s_n(x)$ מתכנסת במ"ש

הערה. עבור כל $x_0 \in I$ טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ הוא טור מספרים.

משפט 7. תנאי שקול להתכנסות במ"ש: סדרת השאריות $r_k := \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל0, כלומר $r_k \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} 0$ ב - I.

משפט 8. תנאי שקול להתכנסות במ"ש: קריטריון קושי

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_N : \forall_{k_2>k_1\geq N} : \forall_{x_0\in I} : \left| \sum_{n=k_1+1}^{k_2} f_n(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

ניתן גם לנסח בצורת

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in I} \left| \underbrace{s_n(x) - s(x)}_{r_n} \right| \right) = 0$$

משפט 9. מבחן החסם של ויירשטרס:
אם $|f_n(x)| \leq a_n$ לכל $x_0 \in I$ ו$\sum a_n < \infty$ אזי טור הפונקציות מתכנס במ"ש ב - I.

משפט 10. מבחן דירכלה:
אם בקטע I מתקיימים התנאים הבאים:

1. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ חסומה באופן אחיד, כלומר $\forall_{x\in I, n\in\mathbb{N}} : |s_n(x)| \leq M$.
2. $g_k(x)$ סדרה מונוטונית מתכנסת במ"ש ל0.

אזי הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot g_n(x)$$

מתכנס במ"ש בI.

הערה. כאשר אנחנו מסתכלים על טור מספרים, נוכל להשתמש בכלים שלמדנו באינפי1 כדי לבדוק התכנסות טורים.

- טור הנדסי: $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ מתכנס $\iff |q| < 1$, והסכום יהיה $\frac{1}{1-q}$.
- צירוף לינארי של טורים מתכנסים/מתבדרים יחדיו
- (טור חיובי) מבחן ההשוואה, מבחן ההשוואה הגבולי
- (טור חיובי) מבחן השורש של קושי: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, $\sum a_n$ מתכנס כאשר $q < 1$.
- (טור חיובי) מבחן דלמבר: $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, $\sum a_n$ מתכנס כאשר $q < 1$.
- (טור חיובי) מבחן העיבוי של קושי: הטור $\sum a_n$ מתכנס $\iff$ $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנס.
- מבחן לייבניץ: אם $a_n \to 0$ אזי $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.
- מבחן דירכלה: אם $a_n \to 0$ ובנוסף סדרת הסכומים החלקיים של b_n חסומה, אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.
- מבחן אבל: אם a_n סדרה מונוטונית מתכנסת ו$\sum b_n$ מתכנס אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

3 טורי חֲזָקוֹת

הגדרה 11. טור חֲזָקוֹת הוא טור פונקציות מהסוג

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- כל טור חזקות מתכנס בנקודה 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$$

- טור חזקות המתכנס בנקודה α מתכנס בהחלט בקטע $(-|\alpha|, |\alpha|)$
- לכל טור חזקות יש מספר $0 \le r < \infty$ הנקרא **רדיוס התכנסות** כך שהטור מתכנס בהחלט עבור $|x| < r$ ומתבדר עבור $|x| > r$.
  (המקרה $|x| = r$ הוא מקרה פרטי וצריך לבדוק בנפרד)
- נוסחת קושי-הדמר:

$$r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

- אם הגבול

$$r := \lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

  קיים, אז הוא רדיוס ההתכנסות.

3.1 התכנסות במידה שווה

- טור חזקות מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו.
- טור חזקות הוא פונקציה רציפה בכל תחום התכנסותו.
- אם טור חזקות מתכנס במ"ש בקטע מהצורה $(r-\delta, r)$, עבור $\delta > 0$, אז הוא מתכנס ב-r.
- אם טור חזקות מתכנס במ"ש בקטע מהצורה $(-r, -r+\delta)$, עבור $\delta > 0$, אז הוא מתכנס ב-$-r$.
- אם טור חזקות עם רדיוס r מתכנס במ"ש בקטע $(-r, r)$ אז תחום התכנסותו $[-r, r]$.

3.2 אינטגרציה וגזירה איבר איבר

- לטורים הבאים אותו רדיוס התכנסות

$$\sum a_n x^n$$
$$\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$\sum a_{n+1}(n+1)x^n$$

- תחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$ מוכל בתחום ההתכנסות של $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
- תחום ההתכנסות של $\sum a_{n+1}(n+1)x^n$ מוכל בתחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$.