פתרון בוחן אינפי 1 תיכוניסטים תש"ף

25 בדצמבר 2019

1. מבחן המנה אלא מה:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[k]{(n+1)!}}{\sqrt[m]{(2n+2)!}}:\frac{\sqrt[k]{n!}}{\sqrt[m]{(2n)!}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[k]{n+1}}{\sqrt[m]{(2n+1)(2n+2)}}$$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[m]{4n^2}}\cdot\frac{\sqrt[k]{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt[m]{1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}}}$$

הביטוי הימני שואף ל־1, מספיק לחשב את הגבול של הביטוי השמאלי:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt[k]{n}}{\sqrt[m]{4n^2}}=\lim_{n\longrightarrow\infty}\frac{n^{\frac{1}{k}-\frac{2}{m}}}{4^{\frac{1}{m}}}$$

מה קורה פה? אם $\frac{2}{m}<\frac{1}{k}$, הגבול הוא ∞ ולכן הטור מתבדר. אם $\frac{2}{m}>\frac{1}{k}$, הגבול הוא 0 ולכן הטור מתכנס. אם מתקיים שוויון, כלומר $m=2k$, הגבול הוא $4^{-\frac{1}{m}}$, והטור מתכנס כאשר $m>0$ (כי אז הגבול קטן מ־1) ומתבדר כאשר $0>m$.

2. אם הסדרה מתכנסת, הגבול L צריך לקיים:

$$L=\frac{1}{4(1-L)}$$

כלומר:

$$4L-4L^2=1\Longrightarrow L=\frac{1}{2}$$

ואנו מבינים שהסדרה מונוטונית עולה. נוכיח זאת באינדוקציה. אכן: $a_2=\frac{1}{4}>a_1$.
נניח ש: $a_{k+1}>a_k$, ונוכיח:

$$a_{k+2}>a_{k+1}$$

ובכן:

$$a_{k+1}>a_k\Longrightarrow 1-a_{k+1}<1-a_k\Longrightarrow\frac{1}{4(1-a_{k+1})}>\frac{1}{4(1-a_k)}$$

ואכן: $a_{k+2} > a_{k+1}$.

בנוסף לכך, נראה ש: $a_n < \frac{1}{2}$ לכל n. לפי הנתון, $a_1 < \frac{1}{2}$; נניח ש: $a_k < \frac{1}{2}$ ונוכיח ש: $a_{k+1} < \frac{1}{2}$. ובכן:

$$\frac{1}{2} > a_k \Longrightarrow \frac{1}{2} < 1 - a_k \Longrightarrow \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} > \frac{1}{4\left(1 - a_k\right)} \Longrightarrow \frac{1}{2} > a_{k+1}$$

כנדרש. סה"כ, הסדרה מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה ולכן מתכנסת; כפי שראינו, במקרה כזה הגבול הוא $L = \frac{1}{2}$.

3. הטענה לא נכונה, למשל: $a_n = (-1)^n$. הסדרה חסומה ולכן כל תת־סדרה היא חסומה, ולפי בולצאנו־ויירשטראס לכל תת־סדרה יש תת־סדרה מתכנסת, אבל הסדרה עצמה לא מתכנסת.