

פתרון תרגיל 9

פתרון:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & -10 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן נילפוטנטית מסדר 3, לכן $\text{Im } A^2 \subseteq \text{Ker } A \cap \text{Im } A \subseteq \text{Ker } A$, ה-rank של A^2 הוא 1. ו-
 $\text{Ker } A = 2$. לכן מספיק למצוא בסיס ל- $\text{Im } A^2$ ולהשלמים לבסיס של $\text{Ker } A$. סה"כ מקבלים:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -16 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -16 & -5 & 7 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 5 & -16 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ תרגיל 5 כנ"ל עבור}$$

פתרון: פ"א $(x-8)^3$, מחסרים 8, מקבלים נילפוטנטית ופותרים כמו הקודמות. מקבלים בסוף:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & -1 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

תזכורת: עבור אופרטור T , המרחב העצמי המוכלל K_λ : (הכל בהנחה שהפ"א מ"ל)

1. הגדרה: $K_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda I)$ (באשר $n = \dim V$).
2. יהי λ ע"ע של T ונסמן ב- T_0 את הצמצום של T ל- K_λ . אזי $f_{T_0} = (x - \lambda)^m$ כאשר $m = \dim K_\lambda$.
3. $\dim K_\lambda$ הוא הרי"א של הע"ע λ .
4. אם ל- T ע"ע $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ אז $V = K_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus K_{\lambda_r}$.
5. מסקנה: משפט ג'ורדן

דוגמא תהי $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 6 & -14 & 10 \end{pmatrix}$. מצא את צורת ג'ורדן J של A ומטריצה הפיכה P כך ש-

$$P^{-1}AP = J$$

פתרון

ראשית נמצא את הפולינום האופייני:

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & -2 & 1 \\ -3 & x+5 & -4 \\ -6 & 14 & x-10 \end{pmatrix} = (x-2)(x+5)(x-10) - 48 - 42 + 6(x+5) + 56(x-2) - 6(x-10)$$

$$= x^3 - 7x^2 + 16x - 12$$

נחשב שורשים רציונליים: מועמדים אפשריים הם המחלקים של 12, כלומר $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$. נציב אותם ונראה כי 2 מאפס את הפולינום, לכן נבצע חילוק פולינומים:

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = (x-2)(x^2 - 5x + 6) - 1 \cdot \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x-2}$$

$$f_A(x) = (x-2)^2(x-3)$$

הר"א של הע"ע 3 הוא 1 לכן (לפי תכונה 3 לעיל) בסיס ל- K_3 יהיה פשוט וקטור עצמי של A : נחפש פתרון ל- $(A-3I)v=0$ ונקבל:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -8 & 4 & 0 \\ 6 & -14 & 7 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר $2y = z$ (מהשורה האמצעית) ולכן $x = 0$ (מהשורה הראשונה) לכן כל הו"ע הם מהצורה $(0, t, 2t)$. עבור $t \in \mathbb{R}$. נבחר למשל $w = (0, 1, 2)$.

הר"א של הע"ע 2 הוא 2 לכן (לפי תכונה 3 לעיל) $\dim K_2 = 2$. נקח $(A-2I)^2 v$, $(A-2I)v$

$$(A-2I)^2 v = 0$$

בתרגום ללשון מטריצות, זה אומר שמסתכלים על החיתוך של imT עם K_2 כלומר מחפשים וקטורים

$$* \quad \begin{aligned} (A-2I)^2 u &= 0 \\ v &= (A-2I)u \end{aligned} \quad \text{כך ש- } v, u$$

ראשית נחשב את $Null(A-2I)^2$.

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן הוקטורים ב- $Null$ הם מהצורה (x, y, z) באשר

$3x - y + z = 0$ (2 דרגות חופש). נבחר למשל $x = 0, y = 1$ ונקבל $z = 1$ כלומר הוקטור

$$u = (0, 1, 1) \quad \text{כעת נמצא את } v : v = (A - 2I) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ כלומר } v = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

נשים את הוקטורים שמצאנו במטריצה:

$$P = (v, u, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{נחשב את ההפכית:}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 6 & -14 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{נחשב:}$$

לורדן.

פתרון התרגילים במ"פ:

1. ודאי ש $v \in V$ ש $\langle \vec{0}, v \rangle = \langle \vec{0}, v \rangle = 0 \langle v, \vec{0} \rangle = 0$ מכיוון
 $\langle v, \vec{0} \rangle = \overline{\langle \vec{0}, v \rangle} = \overline{0} = 0$ וצ"ל

2. המכפלה אינה סימטרית:
 $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 1 \cdot 0 + 7 \cdot 1 \cdot 1 = 7 \neq 1 = 1 \cdot 1 + 7 \cdot 1 \cdot 0 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

3. $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + \alpha x_2 y_2 =$
 $(x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

לפי הכתוב המטריצה סימטרית, ולכן $\alpha = 9$ (אם $\alpha > 0$) או $\alpha = 0$ (אם $\alpha < 0$).
 נבחר $\alpha = 9$.

4. נבקוים:
 $\langle v_1 + v_2 + v_3 + v_4, v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \rangle = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \langle v_i, v_j \rangle =$
 $\sum_{i=1}^4 \langle v_i, v_i \rangle + \sum_{i=1}^4 \sum_{j \neq i}^4 \langle v_i, v_j \rangle = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 0$

אם $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$ נסיק

$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = (\|u\|^2 + 2\operatorname{Re}(u,v) + \|v\|^2) - (\|u\|^2 - 2\operatorname{Re}(u,v) + \|v\|^2) =$
 $4\operatorname{Re}(u,v)$ (5)

$\frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \operatorname{Re}(u,v)$ נראה

אם v נבחרת ארbitרית ו $u, v \in V$ המכפלה סימטרית.
 $\operatorname{Re}(u,v) \neq \langle u, v \rangle$ מכיוון ש $\langle u, v \rangle$ יכול להיות מרוכב.