מבוא לחוגים ומודולים – תרגיל מספר 3:

כתבו וערכו: מתיא בן-אפרים ודרור מידן

מיילים להערות/תיקונים/שאלות:

mattya.be7@gmail.com, meidan.dror@gmail.com

שאלה 1

צ"ל קומוטטיביות וקיום הופכיים ב-R.

קומוטטיביות: יהיו $a,b \in R$. כיוון ש-φ על קיימים $x,y \in F$ כך ש-$a=\varphi(x), b=\varphi(y)$. אזי $ab=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)=\varphi(yx)=\varphi(y)\varphi(x)=ba$, כיוון ש-$\varphi$ הומומורפיזם ו-F שדה.

הופכיים: יהי $0 \neq a \in R$. אזי קיים $x \in F$ כך ש-$\varphi(x)=a$. מתקיים $x \neq 0$, כי אחרת היה מתקיים $a=0$, כי φ הומומורפיזם. לכן כיוון ש-F שדה קיים $y \in F$ כך ש-$xy=yx=1_F$. לכן

$$a\varphi(y)=\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(xy)=\varphi(1_F)=1_R,$$
$$\varphi(y)a=\varphi(y)\varphi(x)=\varphi(yx)=\varphi(1_F)=1_R$$

ולכן a הפיך ומתקיים $a^{-1}=\varphi(y)$.

שאלה 2

סעיף א':

$IJ \subseteq I \cap J$: יהי $a \in IJ$. אם קיימים $i \in I, j \in J$ כך ש$a=ij$, אז מכיוון ש $J \lhd R$ נובע $ij \in J$; וכן $I \lhd R$ ולכן $ij \in I$, ומכאן $ij \in I \cap J$. ועכשיו במקרה שa היה חיבור של כמה זוגות כאלה אזי מסגירות לחיבור נקבל ש $a \in I \cap J$.

$IJ \supseteq (I \cap J)(I \cap J)$: יהי $a \in (I \cap J)(I \cap J)$. אם קיימים $b,c \in I \cap J$ כך ש$bc=a$ אז $b \in I$ ו$c \in J$ ולכן $a \in IJ$. ועכשיו במקרה שa הוא חיבור של כמה זוגות כאלה אזי מסגירות לחיבור נקבל ש $a \in IJ$.

סעיף ב':

$I(J+K) \subseteq IJ+IK$: יהי $a \in I(J+K)$. אם קיימים $b \in I, d \in J, f \in K$ כך ש-
$a=b(d+f)$ אז $a=bd+bf \in IJ+IK$. במידה וa הוא חיבור של ביטויים כאלה אז כל ביטוי בפני עצמו שייך ל$IJ+IK$ ומסגירות לחיבור $a \in IJ+IK$.

$I(J+K) \supseteq IJ+IK$: יהי $a \in IJ+IK$. אם קיימים $i,i' \in I, j \in J, k \in K$ כך ש-
$a=ij+i'k$ אז $a=i(j+0)+i'(0+k)$. כיוון ש-$0 \in J,K$, כל אחד מהביטויים שייך ל-$I(J+K)$, ונקבל מסגירות לחיבור ש $a \in I(J+K)$. באופן כללי a הוא סכום של ביטויים כאלה, ולכן נובע מסגירות של האידאל לחיבור ש-$a \in I(J+K)$.

שאלה 3

ראשית נראה ש-$M_n(I) \lhd M_n(R)$. סגירות לחיבור ולנגדי ברורה כי I סגור לחיבור ולנגדי; ואם $A \in M_n(I), B \in M_n(R)$ אז $(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} \in I$ כי $A_{ik} \in I$ ו-I אידאל, ולכן $AB \in M_n(I)$. בדומה בכיוון השני.

כעת יהי $\rho: R \to \frac{R}{I}$ הומומורפיזם המנה. נגדיר

$$\begin{cases} \varphi: M_n(R) \to M_n\left(\frac{R}{I}\right) \\ \left(\varphi(A)\right)_{ij} = \rho(A_{ij}) \end{cases}$$

ברור ש-φ מוגדרת היטב כי הטווח של ρ הוא $\frac{R}{I}$. גם ברור ש-φ על כי ρ על, וש-$\ker\varphi = M_n(I)$ כי $\ker\rho = I$. לכן נותר להוכיח ש-φ הומומורפיזם, ואז ינבע ממשפט האיזומורפיזם הראשון ש- $\frac{M_n(R)}{M_n(I)} \cong M_n\left(\frac{R}{I}\right)$.

<u>שמירה על חיבור</u>:

$$\left(\varphi(A+B)\right)_{ij} = \rho\left((A+B)_{ij}\right) = \rho\left(A_{ij}+B_{ij}\right) = \rho\left(A_{ij}\right) + \rho\left(B_{ij}\right) = \\ = \left(\varphi(A)\right)_{ij} + \left(\varphi(B)\right)_{ij} = \left(\varphi(A)+\varphi(B)\right)_{ij}$$

כאשר המעבר ה-3 נובע מכך ש-ρ הומומורפיזם. לכן $\varphi(A+B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

<u>יחידה ליחידה</u>:

$$\varphi\left(1_{M_n(R)}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1_R & & 0_R \\ & \ddots & \\ 0_R & & 1_R \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \rho(1_R) & & \rho(0_R) \\ & \ddots & \\ \rho(0_R) & & \rho(1_R) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1_{\frac{R}{I}} & & 0_{\frac{R}{I}} \\ & \ddots & \\ 0_{\frac{R}{I}} & & 1_{\frac{R}{I}} \end{pmatrix} = 1_{M_n\left(\frac{R}{I}\right)}$$

כאשר המעבר ה-3 נובע מכך ש-ρ הומומורפיזם.

<u>שמירה על כפל</u>:

$$\left(\varphi(AB)\right)_{ij} = \rho\left((AB)_{ij}\right) = \rho\left(\sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}\right) = \sum_{k=1}^{n} \rho(A_{ik})\rho\left(B_{kj}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\varphi(A)\right)_{ik}\left(\varphi(B)\right)_{kj} = \left(\varphi(A)\varphi(B)\right)_{ij}$$

כאשר המעבר ה-3 נובע מכך ש-ρ הומומורפיזם. לכן $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$.

שאלה 4

א. $\mathbb{H}$ הוא חוג עם חילוק אבל לעומת זאת ב-$M_2(\mathbb{R})$ קיימים איברים לא הפיכים, לדוגמה: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. לכן החוגים לא איזומורפיים.

<u>הוכחה ש-H חוג עם חילוק</u>: יהי $0 \neq \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$. אזי $a \neq 0$ או $b \neq 0$, לכן $\det\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = |a|^2 + |b|^2 \neq 0$, ולכן $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ הפיך ב-$M_2(\mathbb{C})$.
ההופכי ב-$M_2(\mathbb{C})$ הוא (לפי הנוסחה של adjoint)

$$\frac{1}{|a|^2 + |b|^2}\begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2} & -\dfrac{b}{|a|^2 + |b|^2} \\ -\overline{\left(-\dfrac{b}{|a|^2 + |b|^2}\right)} & \overline{\left(\dfrac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}\right)} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}$$

ולכן $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ הפיך ב-$\mathbb{H}$ כדרוש.

ב. נמצא איזומורפיזם לפי מערכת של יחידות מטריצה. כלומר נמצא איברים $e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22} \in R$ כך ש-$e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ וגם $e_{11} + e_{22} = 1$. ואז נרצה להגדיר את האיזומורפיזם כך שהוא העתקה לינארית בין 2 החוגים כמרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$, וכך ש-e_{ij} נשלחים למטריצות האלמנטאריות המתאימות ב-$M_2(\mathbb{R})$.

הכי מפתה לקחת את $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ אבל זה לא עובד כי אין 2 מטריצות שהסכום שלהן הוא מטריצת היחידה. לכן הגיוני לקחת צירופים לינאריים פשוטים של אלה כך שיהיו 2 מטריצות שהסכום שלהם הוא מטריצת היחידה.

לאחר ניסוי וטעייה הגענו למטריצות

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

שמביניהן מתקיים $1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$. לכן נקבע

$$e_{11} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, e_{22} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

(מי הולך ל-1 ומי ל-2 שרירותי). כדי לקבוע את 2 המטריצות האחרות נשים לב ש-

$$e_{11} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

וזה מסתדר עם $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$ רק כאשר $e_{12} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$ ולא עם e_{21}. לכן זה משאיר לנו $e_{21} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

לכן האיזומורפיזם $\varphi: M_2(\mathbb{R}) \to R$ שניקח הוא

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} + c \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + d \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} + \frac{b-c}{2}i & \frac{b+c}{2} + \frac{a-d}{2}i \\ \frac{b+c}{2} + \frac{d-a}{2}i & \frac{a+d}{2} + \frac{c-b}{2}i \end{pmatrix}$$

די ברור ש-φ מוגדר היטב (מחזיר איברים ב-R), חח"ע ועל.

נוכיח ש-φ הומומורפיזם. ברור שהוא משמר חיבור ומעביר יחידה ליחידה.

שימור כפל:

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \varphi\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{ae+bg+cf+dh}{2} + \frac{af+bh-ce-dg}{2}i & \frac{af+bh+ce+dg}{2} + \frac{ae+bg-cf-dh}{2}i \\ \frac{af+bh+ce+dg}{2} + \frac{-ae-bg+cf+dh}{2}i & \frac{ae+bg+cf+dh}{2} + \frac{-af-bh+ce+dg}{2}i \end{pmatrix}$$

ולעומת זאת

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\varphi\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} + \frac{b-c}{2}i & \frac{b+c}{2} + \frac{a-d}{2}i \\ \frac{b+c}{2} + \frac{d-a}{2}i & \frac{a+d}{2} + \frac{c-b}{2}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{e+h}{2} + \frac{f-g}{2}i & \frac{f+g}{2} + \frac{e-h}{2}i \\ \frac{f+g}{2} + \frac{h-e}{2}i & \frac{e+h}{2} + \frac{g-f}{2}i \end{pmatrix}$$

ואכן אם מכפילים את המטריצות מקבלים אותה תוצאה. זה לא כזה נורא כי אפשר לבדוק שהמטריצות שוות רק ברכיבים 11 ו-12, שכן איברים ב-R נקבעים ע"י הרכיבים האלה ביחידות.

שאלה 5

א. בסעיף זה יש להניח ש-S,S' לא חוגי 0, אחרת זה לא עובד (למשל ב-$\mathbb{Z}_2\times\{0\}$ אין בכלל איברים שאינם 0 או 1).

ואכן, אם מניחים זאת אז ב-$S\times S'$ יש את האיברים $(1_S,0_{S'}),(0_S,1_{S'})$ שהם בבירור אידמפוטנטים. הם לא טריוויאליים כי $0_S\neq 1_S, 0_{S'}\neq 1_{S'}$. והם מרכזיים כי לכל $(a,b)\in S\times S'$ מתקיים

$$(a,b)(1_S,0_{S'})=(a,0_{S'})=(1_S,0_{S'})(a,b)$$
$$(a,b)(0_S,1_{S'})=(0_S,b)=(0_S,1_{S'})(a,b)$$

לכן כיוון ש-$R\cong S\times S'$ נובע שגם ב-R יש לפחות 2 אידמפוטנטים מרכזיים לא טריוויאליים.

ב. אם e אידמפוטנט אז $(1-e)^2=1^2-1\cdot e-e\cdot 1+e^2=1-e-e+e=1-e$, לכן $1-e$ אידמפוטנט.

גם $(1-e)e=e(1-e)=e-e^2=e-e=0$, ולכן $e,1-e$ אורתוגונליים.

ג. ראשית יש לוודא ש-$Re,R(1-e)$ הם אכן חוגים. כיוון שאלה אידאלים חד כיווניים ב-R, הם סגורים לחיבור, נגדי וכפל. לכן נשאר להראות שיש יחידה.

e אידמפוטנט מרכזי ב-R, לכן גם $1-e$ אידמפוטנט מרכזי (אידמפוטנט ראינו, מכרזי כי $a(1-e)=a\cdot 1-a\cdot e=1\cdot a-e\cdot a=(1-e)a$ כי e מרכזי). לכן לכל $a\in R$ מתקיים

$$e\cdot ae=ae\cdot e=ae^2=ae,$$
$$(1-e)\cdot a(1-e)=a(1-e)\cdot(1-e)=a(1-e)^2=a(1-e)$$

ולכן $e=1\cdot e$ ו-$1-e=1\cdot(1-e)$ הם יחידות ב-Re וב-$R(1-e)$ בהתאמה.

כעת נגדיר

$$\begin{cases}\varphi: R\to Re\times R(1-e)\\ \varphi(a)=\big(ae,a(1-e)\big)\end{cases}$$

ונוכיח שזה איזומורפיזם של חוגים.

<u>הומומורפיזם</u>:

שמירה על חיבור –

$$\varphi(a+b)=\big((a+b)e,(a+b)(1-e)\big)=\big(ae+be,a(1-e)+b(1-e)\big)$$
$$=\big(ae,a(1-e)\big)+\big(be,b(1-e)\big)=\varphi(a)+\varphi(b)$$

יחידה ליחידה –

$$\varphi(1_{\mathrm{R}})=\big(1_Re,1_R(1-e)\big)=(e,1-e)=\big(1_{Re},1_{R(1-e)}\big)=1_{Re\times R(1-e)}$$

שמירה על כפל –

$$\varphi(a)\varphi(b) = \big(ae, a(1-e)\big)\big(be, b(1-e)\big) = \big(aebe, a(1-e)b(1-e)\big) =$$
$$= (abe^2, ab(1-e)^2) = \big(abe, ab(1-e)\big) = \varphi(ab)$$

כיוון ש-$e, 1-e$ אידמפוטנטים מרכזיים.

<u>חח"ע</u>: אם $\varphi(a) = \big(ae, a(1-e)\big) = 0_{Re\times R(1-e)} = (0,0)$ עבור $a \in R$ אז
$ae = a(1-e) = 0$, ולכן $a = a(1-e+e) = a(1-e) + ae = 0 + 0 = 0$.
כלומר $\ker\varphi = \{0\}$ ולכן φ חח"ע.

<u>על</u>: יהי $x \in Re \times R(1-e)$, נמצא איבר ב-R שנשלח ל-x.
קיימים $a, b \in R$ כך ש-$x = \big(ae, b(1-e)\big)$. לכן

$$\varphi\big(ae + b(1-e)\big) = \Big(\big(ae + b(1-e)\big)e, \big(ae + b(1-e)\big)(1-e)\Big) =$$
$$= (ae^2 + b(1-e)e, ae(1-e) + b(1-e)^2) = \big(ae, b(1-e)\big) = x$$

כיוון ש-$e, 1-e$ אידמפוטנטים אורתוגונליים.

<u>שאלה 6</u>

א. נתון ש $R \le_l \mathrm{I}$, יהיו $z \in R$ $y \in I^+$.

צ"ל:

1) $zy \in I^+ \Leftrightarrow zyR \subseteq I$

ונשים לב ש $(zy)R = z(yR) \subseteq zI \subseteq I$ (ההכלה האחרונה כי I אידאל שמאלי) ולכן סיימנו.

2) $yz \in I^+ \Leftrightarrow yzR \subseteq I$

ונשים לב ש $yzR \subseteq yR \subseteq I$

3) $\mathrm{I}^+ \neq \emptyset$

אידיאל זה מכיל את איבר האפס $0\mathrm{R} = \{0\} \subseteq I$.

4) סגירות לחיסור

יהיו $x, y \in I^+$ צ"ל $x - y \in I^+$ כלומר צריך להוכיח שלכל $r \in R$ אזי $(x-y)r \in I$.

מהנתון רואים ש $xr, yr \in I$ ולכן מסגירות לחיסור של I נקבל $xr - yr = (x-y)r \in I$.

ב. יהי $i \in I$, צ"ל $i \in I^+ \Leftrightarrow iR \subseteq I$

מפני ש I הוא אידיאל של R אזי $\mathrm{IR} \subseteq \mathrm{I}$ ולכן בפרט $iR \subseteq I$.

ג. מסעיף א' הוכחנו שI^+ הוא אידיאל של R ולכן מסעיף ב' $I^+ \subseteq (I^+)^+$.

מה שנותר להוכיח הוא הצד השני: $I^+ \supseteq (I^+)^+$

יהיו $x \in R$, $i \in (I^+)^+$, אזי $iR \subseteq I^+$. בגלל שR הוא חוג עם יחידה, בפרט ניתן לקחת 1_R ולכן $i = i \cdot 1 \in I^+$.

שאלה 7

א. <u>לא ריק</u>: ברור ש-$0 \cdot a = 0$ לכל $a \in A$, לכן $0 \in \mathrm{Ann}_l(A)$.

<u>סגירות לחיסור</u>: יהיו $x, y \in \mathrm{Ann}_l(A)$. אזי אם $a \in A$ אז $xa = ya = 0$, ולכן $(x-y)a = xa - ya = 0 - 0 = 0$. לכן $x - y \in \mathrm{Ann}_l(A)$.

<u>בליעה משמאל</u>: יהיו $r \in R$, $x \in \mathrm{Ann}_l(A)$. אזי לכל $a \in A$ מתקיים $xa = 0$, ולכן $rxa = r \cdot 0 = 0$. לכן $rx \in \mathrm{Ann}_l(A)$.

ב. נותר להוכיח בליעה מימין.
יהיו $r \in R$, $x \in \mathrm{Ann}_l(A)$. כיוון ש-$A \leq_l R$, לכל $a \in A$ מתקיים $ra \in A$, וכיוון ש-$x \in \mathrm{Ann}_l(A)$ נובע ש- $xra = 0$. לכן $xr \in \mathrm{Ann}_l(A)$.

ג. $\subseteq$: ראשית נשים לב ש-$0 \in A, B$, לכן $A, B \subseteq A + B$ (כי אם $a \in A$ אז $a = a + 0 \in A + B$ וכנ"ל עבור B).
לכן אם $x \in \mathrm{Ann}_l(A + B)$ אז $xa = 0$ לכל $a \in A + B$, ובפרט לכל $a \in A$ ולכל $a \in B$. לכן $x \in \mathrm{Ann}_l(A)$ וגם $x \in \mathrm{Ann}_l(B)$, לכן $x \in \mathrm{Ann}_l(A) \cap \mathrm{Ann}_l(B)$.

$\supseteq$: יהי $x \in \mathrm{Ann}_l(A) \cap \mathrm{Ann}_l(B)$.
יהי $c \in A + B$. אזי $c = a + b$ עבור $a \in A, b \in B$ כלשהם. כיוון ש-$x \in \mathrm{Ann}_l(A)$ וגם $x \in \mathrm{Ann}_l(B)$, נובע ש-$xa = xb = 0$. לכן $xc = x(a+b) = xa + xb = 0$.
מכאן נובע ש-$x \in \mathrm{Ann}_l(A + B)$.