פתרון תרגיל 3 חדוא 2

.1 $$\int e^{2\arcsin(x)}dx=\begin{Bmatrix} t=\arcsin(x) \\ x=\sin(t) \\ dx=\cos(t)dt \end{Bmatrix}=\int \cos(t)e^{2t}dt$$

נסמן כעת $I=\int \cos(t)e^{2t}dt$ ונפעיל את שיטת "חזרה למקורות".

$$I=\int \cos(t)e^{2t}dt=\begin{Bmatrix} f'=\cos(t) & g=e^{2t} \\ f=\sin(t) & g'=2e^{2t} \end{Bmatrix}=\sin(t)e^{2t}-2\int \sin(t)e^{2t}dt=\begin{Bmatrix} f'=\sin(t) & g=e^{2t} \\ f=-\cos(t) & g'=2e^{2t} \end{Bmatrix}=$$

$$=\sin(t)e^{2t}-2\left(-\cos(t)e^{2t}+2\int \cos(t)\mathrm{e}^{2t}\,dt\right)=\sin(t)e^{2t}+2\cos(t)e^{2t}-4I$$

נעביר אגף, נבודד את I ונקבל כי

$$I=\int \cos(t)e^{2t}dt=\frac{\sin(t)e^{2t}+2\cos(t)e^{2t}}{5}+C$$

נחזור ל x ונקבל

$$\int \cos(t)e^{2t}dt=\frac{\sin(t)e^{2t}+2\cos(t)e^{2t}}{5}+C=\frac{xe^{2\arcsin(x)}+2\cos(\arcsin(x))e^{2\arcsin(x)}}{5}+c$$

שימו לב כי $\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}=\sqrt{1-x^2}$.

2. $$\int x\ln(x^2+1)dx=\left\{\begin{matrix} f'=x & g=\ln(x^2+1) \\ f=\dfrac{x^2}{2} & \dfrac{2x}{x^2+1}\end{matrix}\right\}=\frac{x^2\ln(x^2+1)}{2}-\int\frac{x^3}{x^2+1}dx=$$

נבצע חילוק פולינומים, כיוון שדרגת המונה גדולה או שווה לדרגת המכנה:

$$=\frac{x^2\ln(x^2+1)}{2}-\int\frac{x^3}{x^2+1}dx=\frac{x^2\ln(x^2+1)}{2}-\int xdx+\int\frac{x}{x^2+1}dx=$$

נחשב את האינטגרל השמאלי (מיידי) ונשים לב שהאינטגרל הימני הוא שבר חלקי, ונפתור אותו כפי

שלמדנו (בשלב זה עלינו לכפול ולחלק בקבוע על מנת להשלים את המונה להיות נגזרת המכנה.

$$=\frac{x^2\ln(x^2+1)}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\left(x^2\ln(x^2+1)-x^2+\ln\left(x^2+1\right)\right)+C$$

3.

$$\int x^3\sin(x^2)dx=\left\{\begin{matrix} t=x^2 \\ dt=2xdx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\int t\sin(t)dt=\left\{\begin{matrix} f'=\sin(t) & g=t \\ f=-\cos(t) & g'=1\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2}\left(-t\cos(t)+\int\cos(t)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin(t)-t\cos(t)\right)+C=\frac{1}{2}\left(\sin(x^2)-x^2\cos(x^2)\right)+C$$

4. $$\int x^2\arctan(x)dx=\left\{\begin{matrix} f'=x^2 & g=\arctan(x) \\ f=\dfrac{x^3}{3} & g'=\dfrac{1}{x^2+1}\end{matrix}\right\}=\frac{x^3\arctan(x)}{3}-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{x^2+1}dx=$$

אבל פתרנו כבר למעלה את האינטגרל הימני, נרשום את התשובה:

$$=\frac{1}{3}\left(x^3\arctan(x)+\frac{1}{2}\left(-x^2+\ln\left(x^2+1\right)\right)\right)+C$$

5. $$\int e^{\sin(x)}\sin(2x)dx=\int e^{\sin(x)}2\sin(x)\cos(x)dx=\left\{\begin{matrix} t=\sin(x) \\ dt=\cos(x)dx \end{matrix}\right\}=2\int e^{t}tdt=$$

$$=2\int e^{t}tdt=\left\{\begin{matrix} f'=e^{t} & g=t \\ f=e^{t} & g'=1 \end{matrix}\right\}=2\left(te^{t}-\int e^{t}dt\right)=2te^{t}-2e^{t}+C=2\sin(x)e^{\sin(x)}-2e^{\sin(x)}+C$$

6. $$\int e^{2x+e^{x}}dx=\int e^{x}e^{x}e^{e^{x}}dx=\left\{\begin{matrix} t=e^{x} \\ dt=e^{x}dx \end{matrix}\right\}=\int te^{t}dt=\left\{\begin{matrix} f'=e^{t} & g=t \\ f=e^{t} & g'=1 \end{matrix}\right\}=$$

$$=te^{t}-\int e^{t}dt=te^{t}-e^{t}+C=e^{x}e^{e^{x}}-e^{e^{x}}+C$$

7. $$\int\frac{e^{\tan(x)}\sin(x)}{\cos^{3}(x)}dx=\int\tan(x)\frac{e^{\tan(x)}}{\cos^{2}(x)}dx=\left\{\begin{matrix} t=\tan(x) \\ dt=\dfrac{1}{\cos^{2}(x)}dx \end{matrix}\right\}=\int te^{t}dt=$$

אבל פתרנו את האינטגרל הזה לפני שנייה, ולכן זה שווה:

$$=te^{t}-e^{t}+C=\tan(x)e^{\tan(x)}-e^{\tan(x)}+C$$

8. $\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx$

זוהי פונקציה רציונאלית, ונעקוב אחרי האלגוריתם.

ראשית, דרגת המונה גדולה או שווה לדרגת המכנה ולכן נבצע חילוק פולינומים.

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx = \int \left(1-\frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\right)dx = x-\int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx$$

כעת האינטגרל הימני <u>אינו שבר חלקי</u> ולכן עלינו לפרק אותו לשברים חלקיים.

נסמן $x^2=t$ ונקבל כי $t^2+5t+4=(t+1)(t+4)$ ולכן $x^4+5x^2+4=\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)$

נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{5x^2+4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

נעשה מכנה משותף, נשווה מונים ונקבל

$$5x^2+4=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)$$

נפתור ונקבל כי

$$\frac{5x^2+4}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}=\frac{-1}{3}\frac{1}{x^2+1}+\frac{16}{3}\frac{1}{x^2+4}$$

נזכור את הנוסחא $\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$ ונקבל סה"כ כי

$$\int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4}dx = x-\int \frac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}dx = x+\frac{1}{3}\arctan(x)-\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

9. $\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$

שוב מדובר בפונקציה רציונאלית. ראשית המונה מדרגה נמוכה מהמכנה, לכן אין צורך לבצע חילוק פולינומים.

כעת, לא מדובר בשבר חלקי, ולכן עלינו לפרק לשברים חלקיים.

בדומה לתרגיל הקודם, נקבל

$$x^2+5x+4=(Ax+B)(x^2+4)+(Cx+D)(x^2+1)$$

נמצא את הקבועים ונגלה כי

$$\frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}=\frac{1}{3}\frac{5x+3}{x^2+1}-\frac{5}{3}\frac{x}{x^2+4}$$

כעת יש לנו שני שברים חלקיים, נפתור אותם לפי האלגוריתם.

ראשית נפתר מה x במונה על ידי כפל וחילוק בקבוע, ואז חיבור וחיסור לצורך השלמה לנגזרת המכנה:

$$\int \frac{1}{3}\frac{5x+3}{x^2+1}dx=\frac{5}{6}\int \frac{2x+\frac{6}{5}}{x^2+1}dx=\frac{5}{6}\int \frac{2x}{x^2+1}dx+\int \frac{1}{x^2+1}dx=\frac{5}{6}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan(x)+C$$

$$\int \frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)+C$$

וסה"כ קיבלנו כי:

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx=\frac{5}{6}\ln\left(x^2+1\right)+\arctan(x)-\frac{5}{6}\ln\left(x^2+4\right)+C$$

10. $\int \frac{1}{x^3+1}dx$

שוב מדובר בפונקציה רציונאלית, דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה, לא מדובר בשבר חלקי ולכן יש

לפרק לשברים חלקיים: $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$

נמצא את הקבועים ונגלה כי $\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{-x+2}{x^2-x+1}$

האינטגרל השמאלי מיידי $\int \frac{1}{x+1}dx=\ln|x+1|+C$

נעבוד על האינטגרל של השבר החלקי מימין, כפי שהסברנו בכיתה (ובתרגיל הקודם).

$$\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-x+1}dx=-\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2-x+1}dx$$

כעת משמאל המונה הוא נגזרת המכנה ולכן $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\ln|x^2-x+1|+C$

באינטגרל מימין, נבצע השלמה לריבוע $\int \frac{1}{x^2-x+1}dx=\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$

נשתמש בנוסחא $\int \frac{dx}{(x-a)^2+b^2}=\frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)+C$ ונקבל

$$\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)+C$$

נחבר את הכל ביחד וסה"כ נקבל כי:

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right)+C$$

11. $$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-1)} = \int \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}$$

דרגת המונה קטנה מדרגת המכנה, זהו לא שבר חלקי ולכן עלינו לפרק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

נמצא את הקבועים ונגלה כי

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}$$

איזה כיף, קלי קלות, יוצא ש:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2-1)} = -\frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + C$$

12. $\int \frac{2x^3+3x^2-x-14}{x^3-8}dx$

כיוון שדרגת המונה גדולה או שווה לדרגת המכנה, נבצע חילוק פולינומים.

$$\int \frac{2x^3+3x^2-x-14}{x^3-8}dx = \int 2dx + \int \frac{3x^2-x+2}{x^3-8}dx =$$

כעת נסטה מהאלגוריתם הרגיל שלנו, כיוון שאנו מזהים הזדמנות (בתקווה שתועיל לנו).

$$= \int 2dx + \int \frac{3x^2-x+2}{x^3-8}dx = 2x + \int \frac{3x^2}{x^3-8}dx + \int \frac{-x+2}{x^3-8}dx$$

אבל באינטגרל השמאלי, המונה הינו נגזרת המכנה ולכן

$$\int \frac{3x^2}{x^3-8}dx = \ln\left|x^3-8\right| + C$$

ובאינטגרל הימני יש לנו צמצום!

$$\int \frac{-x+2}{x^3-8}dx = -\int \frac{1}{x^2+2x+4}dx = -\int \frac{1}{(x+1)^2+3}dx = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

וסה"כ קיבלנו כי

$$\int \frac{2x^3+3x^2-x-14}{x^3-8}dx = 2x + \ln\left|x^3-8\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

13. $\int \frac{\cos(x)-\sin(x)+1}{\cos(x)+\sin(x)+1}dx$

ניתן להשתמש בהצבה הטריגונומטרית האוניברסלית $t=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ עבורה מתקיים:

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2},\sin(x)=\frac{2t}{1+t^2},\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

ולכן $\int \frac{\cos(x)-\sin(x)+1}{\cos(x)+\sin(x)+1}dx=\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}+1}\frac{2}{1+t^2}dt=2\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+1}{1-t^2+2t+1+t^2}dt=$

$$=\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}-\frac{2t}{1+t^2}+1}{1+t}dt=\int\left(\frac{1-2t-t^2}{(1+t^2)(1+t)}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

ואנו יודעים לפתור אינטגרל זה.

מצד שני, ניתן להשתמש בזהויות טריגונומטריות של זווית כפולה:

$$\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=1+\sin(x)$$
$$\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2=\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)=1-\sin(x)$$
$$\cos(x)=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

וביחד נקבל כי

$$\cos(x)+\sin(x)+1=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
$$\cos(x)-\sin(x)+1=2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

ולכן

$$\int \frac{\cos(x)-\sin(x)+1}{\cos(x)+\sin(x)+1}dx = \int \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)}dx = \left\{\begin{array}{l} t=\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ dt=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)-\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx \end{array}\right\} =$$

$$= 2\int \frac{1}{t}dt = 2\ln|t| = 2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

נכון טריק נחמד?

14. $\int \frac{dx}{x^4+1}$

מדובר בפונקציה רציונאלית, ועל מנת לפרק אותה לשברים חלקיים, עלינו לפרק את הפולינום במכנה לגורמים אי פריקים. נשתמש בידע שלנו במרוכבים על מנת לעשות את זה.

נמצא את כל פתרונות המשוואה $z^4+1=0$ כלומר $z^4=-1=cis(\pi)$

נקבל את 4 השורשים $cis\left(\frac{\pi}{4}\right), cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right), cis\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right), cis\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)$

נעבור לצורה קרטזית ונגלה שכל השורשים הם מהצורה $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$

לכן,

$$z^4+1=\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)\left(z-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)\left(z-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)$$

כיוון שהמכפלה $(z-z_1)(z-\overline{z_1})=z^2-2\operatorname{Re}(z_1)+|z_1|^2$ יוצא ש

$$z^4+1=\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)$$

אבל זה כבר נכון עבור מספרים ממשיים!

לכן, $$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}$$

נפרק לשברים חלקיים ונקבל כי

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

מכאן נבצע את הפעולות הרגילות של האלגוריתם לפתרון השברים החלקיים ונקבל לבסוף כי

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\left|x^2+\sqrt{2}x+1\right|-\ln\left|x^2-\sqrt{2}x+1\right|\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)-\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)\right)+C$$