

שאלון סגור

בס"ד
שאלון בחינה בקורס: משוואות דיפרנציאליות רגילות
מספר הקורס: 83-115-01
מרצה: דר' אלכסנדרה אגרנוביץ'
מתרגלים: מיכאל קונטורוביץ', זהבית צבי, רואי אסרף
סמסטר ב', מועד ב': כאלול התשעה (4.09.2015)
משך הבחינה: שלוש שעות

חומר עזר: 3 דפים חד-צדדיים של A4, מחשבון רגיל (אין להשתמש במחשבון גרפי)

ניקוד: במבחן אפשר לצבור 108 נקודות.

יש לפרט שלבי החישוב נא לכתוב באופן ברור ומסודר. שאלה מבולגנת ולא מסודרת לא תוכל לזכות במלוא הנקודות.

בהצלחה!

שאלה 1. (24 נקודות)

א. בהינתן משוואה $-2xydy + (x^2 + y^2)dx = 0$

i. עבור אילו ערכים של b מובטח פתרון יחיד של בעיית התחלה

$-2xydy + (x^2 + y^2)dx = 0, y(b) = 1$? ענו בלי לפתור את המשוואה. נמקו היטב;

ii. מצאו את פתרון כללי של המשוואה הנתונה.

ב. ידוע שהמשוואה $\frac{e^y}{\cos y} - \tan y + y' = 0$ בעלת גורם אינטגרציה $\mu = e^{-ay} \cos y$ עבור

a כלשהו. מצאו את a ופתרו את המשוואה.

שאלה 2. (16 נקודות)

למשוואה $y'' + 9y = \frac{9}{\cos^2 3t}$ יש פתרון פרטי $y = \sin 3t \cdot \ln\left(\tan 3t + \frac{1}{\cos 3t}\right) - 1$ בקטע

$0 < t < \frac{\pi}{6}$.

א. הראו, איך מוציאים את הפתרון הזה ע"י שיטת ווריאציה פרמטרים. היעזרו

בנוסחה $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a} \ln\left(\tan ax + \frac{1}{\cos ax}\right) + C$;

ב. מצאו פתרון של המשוואה הנתונה עם תנאי התחלה $y(0) = A, y'(0) = B$ עבור

$A, B \in \mathbb{R}$ נתונים. עבור אילו ערכים של A, B מתקבל פתרון מסעיף א'?

שאלה 3 . (32 נקודות)

- א. בהינתן $y_1(x)$, $y_2(x)$ ו- $y_3(x)$ - פתרונות פרטיים בלתי תלויים ליניארית של המשוואה $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = g(x)$, כאשר $a(x), b(x), c(x)$ - פונקציות רציפות ו- $a(x) \neq 0$ בכל ה- \mathbb{R} .
- i. הוכיחו כי $u_1(x) = y_1(x) - y_2(x)$ ו- $u_2(x) = y_2(x) - y_3(x)$ מהוות קבוצה יסודית של פתרונות למשוואה $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$;
- ii. רשמו את פתרון כללי למשוואה ההומוגנית באמצעות $y_1(x)$, $y_2(x)$ ו- $y_3(x)$.
- ב. נתון כי הפונקציות $y_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $y_2(x) = \frac{1 + \cos 3x}{\sqrt{x}}$ הן שני פתרונות של המשוואה $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = h(x)$.
- i. מצאו את $h(x)$;
- ii. מצאו את הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.
- ג. מצאו את צורת פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית הבאה (אין צורך לחשב את המקדמים): $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = x(4 + \cos 2x)$.

שאלה 4 . (16 נקודות)

- נתונה המטריצה $A = \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ -1 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$ עבור $\alpha \in \mathbb{R}$.
- א. מצאו את פתרון כללי של המערכת $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t)$;
- ב. מצאו את פתרון כללי של המערכת $\bar{x}'(t) = A\bar{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ t+1 \end{pmatrix} e^t$.

שאלה 5 . (20 נקודות)

- א. מהו הפתרון של הבעיה התחלה $y'' + y' + \frac{5}{4}y = u_{\frac{\pi}{2}}(t) \left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ בקטע $[0, 1]$?
- ב. מצאו פתרון של בעיית התחלה $y'' + y' + \frac{5}{4}y = t - u_{\frac{\pi}{2}}(t) \left(t - \frac{\pi}{2}\right)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. \sqrt{t}	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	12. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
13. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	14. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
15. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	16. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
17. $u_c(t) = u(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$	18. $\delta(t-c)$	e^{-cs}
19. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	20. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
21. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	22. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
23. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	24. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
25. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	26. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
27. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		