תרגיל 9

להגשה עד 30.1.17

יהי $(X, \mathbb{A}, \mu)$ ממ"ח.
נסמן: $L^p(\mu) = L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$. ו: $l^p = l^p(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}), \mu)$, באשר μ הינה מידת הספירה.

שאלה 1

1. נניח כי $\mu(X) < \infty$. הוכיחו כי אם $1 \leq r < p < \infty$ אזי $L^p(\mu) \subseteq L^r(\mu)$ ולכל $f \in L^p(\mu)$ מתקיים:

$$\|f\|_r \leq \mu(X)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

2. הוכיחו כי אם $r < p$ אזי $l^r \subsetneqq l^p$.

שאלה 2

תהי $(f_n)_{\mathbb{N}}$ סדרת פונקציות ממשיות מדידות־$\mathbb{A}$ על X המתכנסת כב"מ לפונקציה f.
נניח שעבור $p \in [1, \infty)$ קיימת $g \in L^p(\mu)$ כך שלכל n: $|f_n| \leq g$ (כב"מ). הוכיחו כי $f,\ f_n \in L^p(\mu)$,
וכן כי $f_n \to f$ ב $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

שאלה 3

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט ו$\mathcal{M}$ תת מרחב לינארי סגור של $\mathcal{H}$. הוכיחו כי: $(\mathcal{M}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{M}$.

שאלה 4

יהי $\mathcal{H}$ מרחב הילברט עם בסיס בן מניה ותהי $(x_n)_{\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$. נתון כי $\|x_n\| \to \|x\|$ כאשר $n \to \infty$, וכי לכל $y \in \mathcal{H}$ מתקיים: $\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle$ כאשר $n \to \infty$. הוכיחו כי: $\|x_n - x\| \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

שאלה 5

1. יהי $1 \leq p \leq \infty$. הוכיחו כי $l^p \subseteq l^\infty$.
2. הראו כי המרחב $(l^1, \|\cdot\|_\infty)$ אינו שלם.

שאלה 6

יהי $p \in [1, \infty)$, ותהי $f \in L^p(\mu)$. הוכיחו כי המידה של הקבוצה: $[f \neq 0] = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ הינה σ־ סופית (כלומר, ניתן להציג את הקבוצה כאיחוד של קבוצות מדידות ובעלות מידה סופית).

שאלה 7

נגדיר: $F := \{(a_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid \sup_n n|a_n| < \infty\}$. הוכיחו או הפריכו:

1. F תת מרחב לינארי של l^2.
2. הקבוצה $F \cap l^2$ סגורה בl^2.

בהצלחה :)