# פתרון תרגיל 1 – מבוא לאנליזה 1

1. עבור $A=\{1,2,\{1,2\}\}$, $B=\{2,3,\{1,2\}\}$ מתקיים:

$$A\cup B=\{1,2,3,\{1,2\}\},\ \ A\cap B=\{2,\{1,2\}\}$$

ולכן

$$A\bigtriangleup B=\{1,2,3,\{1,2\}\}\backslash\{2,\{1,2\}\}=\mathbf{\{1,3\}}$$

2. (א) צ"ל: $\{5n\colon n\in\mathbb{N}\}\cap\{7n\colon n\in\mathbb{N}\}=\{35n\colon n\in\mathbb{N}\}$

$(\supseteq)$: יהי $x\in\{35n\colon n\in\mathbb{N}\}$ כלשהו. אזי $x=35m$ לאיזשהו $m\in\mathbb{N}$. נשים לב כי $7m\in\mathbb{N}$ ולכן $x=5\cdot 7m\in\{5n\colon n\in\mathbb{N}\}$. בדומה, $5m\in\mathbb{N}$ ולכן $x=7\cdot 5m\in\{7n\colon n\in\mathbb{N}\}$. לפיכך $x\in\{5n\colon n\in\mathbb{N}\}\cap\{7n\colon n\in\mathbb{N}\}$.

$(\subseteq)$: יהי $x\in\{5n\colon n\in\mathbb{N}\}\cap\{7n\colon n\in\mathbb{N}\}$ כלשהו. אזי קיימים $a,b\in\mathbb{N}$ כך ש־$x=5a=7b$. אפשר לפרק את $a$ ו־$b$ לגורמים ראשוניים:

$$a=p_1\cdot p_2\cdots p_k\quad,\quad b=q_1\cdot q_2\cdots q_s$$

אזי $x=5\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_k=7\cdot q_1\cdot q_2\cdots q_s$. אלו שתי הצגות של $x$ כמכפלה של מספרים ראשוניים. כיוון שהפירוק לגורמים ראשוניים הוא יחיד, קיים $1\leq i\leq k$ כך ש $p_i=7$ (במילים פשוטות, הגורם 7 מופיע בפירוק הימני, ולכן חייב להופיע גם בפירוק השמאלי). לכן אפשר לרשום: $p_1\cdot p_2\cdots p_k=7m$ עבור $m\in\mathbb{N}$ מתאים, ולקבל $x=5\cdot p_1\cdot p_2\cdots p_k=5\cdot 7m=35\cdot m$, ומכאן ש־$x\in\{35n\colon n\in\mathbb{N}\}$, כדרוש.

(ב) צ"ל: $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\{0\}$

$(\supseteq)$: יהי $x\in\{0\}$. אזי $x=0$. לכל $n$ טבעי, $-\frac{1}{n}<0<\frac{1}{n}$, כלומר $0\in\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ , ולכן $x=0\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ .

$(\subseteq)$: יהי $x\in\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$ כלשהו. צ"ל ש־$x\in\{0\}$, כלומר $x=0$. נניח בשלילה ש־$x\neq 0$. אזי $\frac{1}{|x|}\in\mathbb{R}>0$. הקבוצה $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל, לכן יש $m\in\mathbb{N}$ המקיים: $m>\frac{1}{|x|}$ (אחרת היינו מקבלים ש־$\frac{1}{|x|}$ חסם מלעיל). אזי $|x|>\frac{1}{m}\Leftarrow x>\frac{1}{m}$ או $x<-\frac{1}{m}\Leftarrow x\notin\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)$. אבל

$\left(-\frac{1}{m},\frac{1}{m}\right)$ היא אחת הקבוצות המשתתפות בחיתוך, ולכן $x\notin\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)$, בסתירה להנחה הראשונית.

3. (א) $\{\frac{n}{n+1}:n\in\mathbb{N}\}$: המינימום הוא $\frac{1}{2}$, לא קיים מקסימום.

**הוכחה:** עבור $n=1$, $\frac{n}{n+1}=\frac{1}{2}$, ולכן $\frac{1}{2}$ שייך לקבוצה. כדי להראות שזהו המינימום יש להוכיח כי $\frac{1}{2}\geq\frac{n}{n+1}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. ואכן,

$$n\in\mathbb{N}\;\Rightarrow\;n\geq1\;\Rightarrow\;2n\geq n+1\;\Rightarrow\;\frac{n}{n+1}\geq\frac{1}{2}$$

כעת נניח בשלילה שיש מקסימום. אז קיים $m\in\mathbb{N}$ מסוים כך ש-$\frac{m}{m+1}$ הוא המקסימום. אבל נשים לב שעבור $2m\in\mathbb{N}$, $\frac{2m}{2m+1}$ שייך לקבוצה ומקיים:

$$\frac{2m}{2m+1}>\frac{2m}{2m+2}=\frac{m}{m+1}$$

בסתירה למקסימליות $\frac{m}{m+1}$.

(ב) $\{5+\frac{2}{3n}:n\in\mathbb{N}\}$: לא קיים מינימום, המקסימום הוא $5\frac{2}{3}$.

**הוכחה:** עבור $n=1$, $5\frac{2}{3}=5+\frac{2}{3n}$, ולכן $5\frac{2}{3}$ שייך לקבוצה. כדי להראות שזהו המקסימום יש להוכיח כי לכל $n\in\mathbb{N}$, $5\frac{2}{3}\leq 5+\frac{2}{3n}$. ואכן,

$$n\in\mathbb{N}\;\Rightarrow\;n\geq1\;\Rightarrow\;\frac{3n}{2}\geq\frac{3}{2}\;\Rightarrow\;\frac{2}{3}\geq\frac{2}{3n}\;\Rightarrow\;5\frac{2}{3}\geq5+\frac{2}{3n}$$

כעת נניח בשלילה שיש מינימום. אז קיים $m\in\mathbb{N}$ מסוים כך ש-$5+\frac{2}{3m}$ הוא המינימום. אבל נשים לב שעבור $2m\in\mathbb{N}$, $5+\frac{2}{3\cdot2m}$ שייך לקבוצה ומקיים:

$$5+\frac{2}{3\cdot2m}=5+\frac{1}{3m}<5+\frac{2}{3m}$$

בסתירה למינימליות $5+\frac{2}{3m}$.

(ג) $\{0<x\in\mathbb{R}:\;9^{2x^2}\leq27\}$: לא קיים מינימום, המקסימום הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**הוכחה:** נשים לב כי

$$9^{2x^2}\leq27\iff(3^2)^{2x^2}\leq3^3\iff3^{4x^2}\leq3^3\iff$$

$$\iff4x^2\leq3\iff x^2\leq\frac{3}{4}\iff-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ומכאן ש:

$$\{0<x\in\mathbb{R}:\;9^{2x^2}\leq27\}=\{0<x\in\mathbb{R}:\;-\frac{\sqrt{3}}{2}\leq x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}\}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

כדי לסיים נוכיח טענה כללית יותר: אם $a<b$ ממשיים, אז לקטע החצי פתוח $(a,b]$ אין מינימום, והמקסימום שלו הוא $b$.

הוכחת הטענה: קל לראות שהמקסימום הוא $b$, שכן $b\in(a,b]$ ולכל $x\in(a,b]$ מתקיים בפרט $x\leq b$.

נניח בשלילה שקיים מינימום $x\in(a,b]$. נשים לב שגם $\frac{a+x}{2}\in(a,b]$, שכן:

$$a=\frac{a+a}{2}<\frac{a+x}{2}<\frac{x+x}{2}=x\leq b\ \Rightarrow\ a<\frac{a+x}{2}<b$$

(שימו לב ש־$\frac{a+x}{2}$ הוא הממוצע של $a$ ו־$x$ ולכן ודאי נמצא ביניהם). מצד שני, אי־השוויון שלעיל מראה כי $\frac{a+x}{2}<x$, בסתירה למינימליות $x$.

4. (א)

$$2^{x+1}+2^{2-x}=9$$

$$2\cdot 2^x+4\cdot 2^{-x}=9$$

נכפול את שני האגפים ב־$2^x\neq 0$:

$$2\cdot(2^x)^2+4=9\cdot 2^x$$

נסמן $t=2^x$ ונקבל משוואה ריבועית:

$$2t^2+4=9t$$

$$2t^2-9t+4=0$$

$$t_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-32}}{4}=\frac{9\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{9\pm 7}{4}$$

$$t_1=\frac{16}{4}=4\ \Rightarrow\ 2^{x_1}=4\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x_1=2}$$

$$t_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 2^{x_2}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x_2=-1}$$

(ב)

$$35\cdot 3^{x-3}\cdot 2^{-x}=\left(\frac{9}{4}\right)^x+\frac{8}{27}$$

$$35\cdot 3^x\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{2^x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}+\frac{8}{27}$$

$$\frac{35}{27}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^x=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2+\frac{8}{27}$$

נסמן $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$ ונקבל משוואה ריבועית:

$$\frac{35}{27}\cdot t=t^2+\frac{8}{27}$$

$$35t = 27t^2 + 8$$

$$27t^2 - 35t + 8 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot 27 \cdot 8}}{54} = \frac{35 \pm \sqrt{361}}{54} = \frac{35 \pm 19}{54}$$

$$t_1 = \frac{54}{54} = 1 \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{2}\right)^{x_1} = 1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_1 = 0}$$

$$t_2 = \frac{16}{54} = \frac{8}{27} \;\Rightarrow\; \left(\frac{3}{2}\right)^{x_2} = \frac{8}{27} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x_2 = -3}$$

5. (א)

$$\left|\frac{5x-3}{3x-4}\right| > 1$$

תחום הגדרה: $x \neq \frac{4}{3}$

$$\frac{5x-3}{3x-4} < -1 \quad \vee \quad \frac{5x-3}{3x-4} > 1$$

$$\frac{5x-3}{3x-4} + 1 < 0 \quad \vee \quad \frac{5x-3}{3x-4} - 1 > 0$$

$$\frac{5x-3+(3x-4)}{3x-4} < 0 \quad \vee \quad \frac{5x-3-(3x-4)}{3x-4} > 0$$

$$\frac{8x-7}{3x-4} < 0 \quad \vee \quad \frac{2x+1}{3x-4} > 0$$

נכפול את 2 האגפים ב־$(3x-4)^2 > 0$:

$$(8x-7)(3x-4) < 0 \quad \vee \quad (2x+1)(3x-4) > 0$$

$$\frac{7}{8} < x < \frac{4}{3} \quad \vee \quad \left(x < -\frac{1}{2} \;\vee\; x > \frac{4}{3}\right)$$

ובסה"כ לאחר חיתוך עם תחום ההגדרה נקבל:

$$\boldsymbol{x < -\frac{1}{2} \;\vee\; \frac{7}{8} < x < \frac{4}{3} \;\vee\; x > \frac{4}{3}}$$

(ב)

$$|x-1| + |x+3| \geq 10$$

ניתן לפתור בדומה לסעיף הקודם (כאשר ראשית "נפטרים" מערך מוחלט אחד ואח"כ מהשני). נציג דרך אחרת – חלוקה למקרים לפי הסימן של $x-1$ ו־$x+3$:

מקרה 1: $x-1\ge 0$ וגם $x+3\ge 0 \iff x\ge 1$ וגם $x\ge -3 \iff x\ge 1$. במקרה זה ניתן להסיר את שני הערכים המוחלטים:

$$x-1+x+3\ge 10 \iff 2x\ge 8 \iff x\ge 4$$

ובסה"כ במקרה זה: $x\ge 4$.

מקרה 2: $x-1\ge 0$ וגם $x+3<0 \iff x\ge 1$ וגם $x<-3 \iff$ אף $x$. לכן מקרה זה לא ייתכן ואין צורך להמשיך לבדוק את אי־השוויון.

מקרה 3: $x-1<0$ וגם $x+3\ge 0 \iff x<1$ וגם $x\ge -3 \iff -3\le x<1$. במקרה זה ניתן להסיר את שני הערכים המוחלטים כאשר $x-1$ הופך סימן:

$$-(x-1)+x+3\ge 10 \iff 4\ge 10$$

ושוב קיבלנו אף $x$.

מקרה 4: $x-1<0$ וגם $x+3<0 \iff x<1$ וגם $x<-3 \iff x<-3$. במקרה זה ניתן להסיר את שני הערכים המוחלטים כאשר $x-1$ ו־$x+3$ הופכים סימן:

$$-(x-1)-(x+3)\ge 10 \iff -2x\ge 12 \iff x\le -6$$

ובסה"כ במקרה זה: $x\le -6$.

התשובה הסופית היא איחוד ארבעת המקרים: $\boldsymbol{x\ge 4}$ **או** $\boldsymbol{x\le -6}$.

(ג)

$$(x^2+x+1)^{x^2+x-2}<1$$

אפשר לרשום את אי־השוויון באופן הבא:

$$(x^2+x+1)^{x^2+x-2}<(x^2+x+1)^0$$

זהו אי־שוויון מעריכי כשהמשתנה גם בבסיס. הבסיס בהכרח חיובי. נפריד לשני מקרים (הבסיס בין 0 ל־1, או הבסיס גדול מ־1):

מקרה 1: $0<x^2+x+1<1 \iff x^2+x<0$ וגם $0<x^2+x+1 \iff x\cdot(x+1)<0$ וגם כל $x \iff -1<x<0$.
במקרה זה אי־השוויון מתהפך בין המעריכים, כלומר נדרוש גם:
$x^2+x-2>0 \iff (x+2)(x-1)>0 \iff x>1$ או $x<-2$.
ובסה"כ לאחר חיתוך התנאים על הבסיס והמעריכים: אף $x$.

מקרה 2: $x^2+x+1>1 \iff x>0$ או $x<-1$ (הפוך למקרה 1). במקרה זה אי־השוויון נשמר בין המעריכים, כלומר נדרוש גם:
$x^2+x-2<0 \iff -2<x<1$ (הפוך מהמקרה הראשון).
ובסה"כ לאחר חיתוך התנאים על הבסיס והמעריכים נקבל: $0<x<1$ או $-2<x<-1$

התשובה הסופית היא איחוד שני המקרים: $\boldsymbol{0<x<1}$ **או** $\boldsymbol{-2<x<-1}$.

(ד)

$$\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^{x^2}>\left(x^2+\frac{3}{4}\right)^{2x}$$

בדומה לסעיף הקודם, נפריד למקרים בהתאם לגודל הבסיס:

מקרה 1: $1 < x^2 + \frac{3}{4} < 1 \iff 0 < x^2 < \frac{1}{4}$ וגם $x^2 > -\frac{3}{4} \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ וגם כל $x \iff -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

במקרה זה אי־השוויון מתהפך בין המעריכים, כלומר נדרוש גם:
$x^2 < 2x \iff x \cdot (x-2) < 0 \iff 0 < x < 2$.

ובסה"כ לאחר חיתוך התנאים על הבסיס והמעריכים: $0 < x < \frac{1}{2}$.

מקרה 2: $x^2 + \frac{3}{4} > 1 \iff x^2 > \frac{1}{4} \iff x > \frac{1}{2}$ או $x < -\frac{1}{2}$.

במקרה זה אי־השוויון נשמר בין המעריכים, כלומר נדרוש גם:
$x^2 > 2x \iff x \cdot (x-2) > 0 \iff x > 2$ או $x < 0$.

ובסה"כ לאחר חיתוך התנאים על הבסיס והמעריכים: $x > 2$ או $x < -\frac{1}{2}$.

התשובה הסופית היא איחוד שני המקרים: $\mathbf{x > 2}$ **או** $\mathbf{0 < x < \frac{1}{2}}$ **או** $\mathbf{x < -\frac{1}{2}}$.

6. (א) **הוכחה**: אכן, לפי אי־שוויון המשולש:

$$|x-z| = |x-y+y-z| \le |x-y| + |y-z| = |x-y| + |z-y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ב) **הוכחה:** יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ כלשהם. צ"ל: $||a|-|b|| \le |a-b|$.
אי־שוויון זה שקול ל־ $-|a-b| \le |a|-|b| \le |a-b|$ (ע"י "ניטרול" הערך המוחלט החיצוני באגף שמאל). נראה ששני אי־השוויונים הנ"ל מתקיימים. לפי אי־שוויון המשולש (הרגיל):

$$|a| = |a-b+b| \le |a-b| + |b| \ \Rightarrow\ |a| \le |a-b| + |b| \ \Rightarrow\ |a|-|b| \le |a-b|$$

ובדומה:

$$|b| = |b-a+a| \le |b-a| + |a| \ \Rightarrow\ |b| \le |a-b| + |a| \ \Rightarrow\ -|a-b| \le |a|-|b|$$

וסיימנו.