אינפי 4 תרגול 1

30 במרץ 2015

עקומה (מסילה) היא פונקציה (רציפה) $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. אפשר לתאר צורות רבות כתמונות של עקומות - פרמטריזציה שלהן.

לדוגמה:

1. קטע בין שתי נקודות a, b:

$$\gamma(t) = a(1-t) + bt, t \in [0,1]$$

2. מעגל קנוני עם רדיוס 1:

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$$

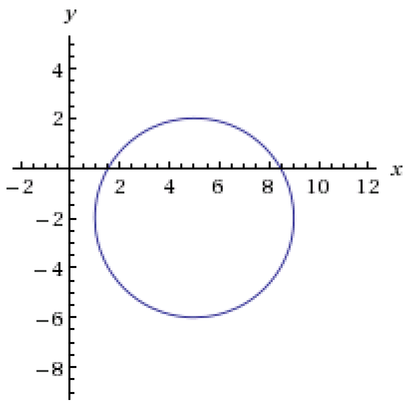
באופן כללי, מעגל עם רדיוס R שמרכזו בנקודה (a,b):

$$\gamma(t) = (a + R\cos t, b + R\sin t), t \in [0, 2\pi]$$

ומה יקרה אם נשנה את התחום? למשל, אם התחום יהיה $t \in [0, 4\pi]$ נקבל את אותו המעגל, אבל בכל נקודה בו העקומה עוברת פעמיים!

3. אליפסה עם מרכז בראשית הצירים ומוקדים a, b:

$$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t), t \in [0, 2\pi]$$



איור 1:

מעגל שמרכזו בנקודה $(5,-2)$ ורדיוסו 4.

4. מה יקרה אם במקום R בפרמטריזציה של המעגל נשים t? ה"רדיוס" כל הזמן משתנה ולכן נקבל ספירלה:

וקטור המשיק לעקומה γ הוא וקטור הנגזרות: $\gamma'(t)$.

עבור עקומה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ נגדיר כמה הגדרות:

א. עקומה נקראת **פשוטה** אם היא חח"ע. אינטואיטיבית, פירוש הדבר שהעקומה אינה חותכת את עצמה.

ב. עקומה נקראת **סגורה** אם $\gamma(a) = \gamma(b)$.

ג. עקומה נקראת **רגולרית** אם לכל t $\gamma'(t) \neq 0$.

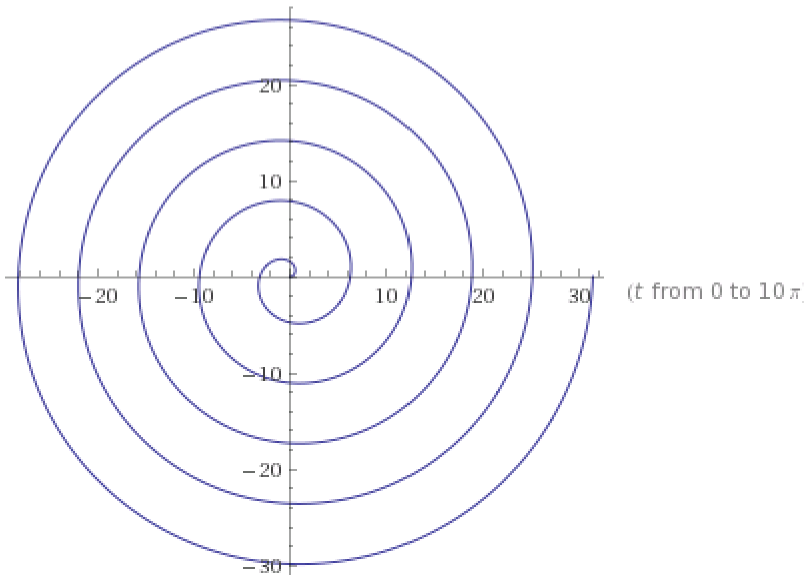
ד. עקומה נקראת **חלקה** אם היא גזירה ברציפות ורגולרית.

ה. עקומה נקראת **חלקה למקוטעין** (ובאופן דומה גזירה ברציפות למקוטעין) אם היא חלקה פרט למספר סופי של נקודות.

ו. נגדיר **אורך של עקומה** להיות:

$$L(\gamma) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k+1})| \right\}$$

כאשר הסופרימום רץ על כל $n \in \mathbb{N}$ ועל כל חלוקה של הקטע $[a,b]$. למעשה, זהו הסופרימום של אורכי העקומות שמקרבות את γ המורכבות מקטעים ישרים (עקומות



איור 2:

ספירלה; העקומה $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t), t \in [0, 10\pi]$.

פוליגונליות).

עקומה שלה אורך סופי נקראת **עקומה בעלת אורך**.

אם העקומה שלנו חלקה, אפשר לחשב את אורכה ע"י הנוסחה:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

<u>תרגיל:</u>

חשבו את אורך העקומה $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ כאשר $t \in [0, 1]$.

<u>פתרון:</u>

קל לראות שהעקומה שלנו חלקה. וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

ולכן:

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

ואם כן האורך שלנו יהיה:

$$L(\gamma) = \int_0^1 (e^t + e^{-t})dt = e - \frac{1}{e}$$

<u>תרגיל:</u>

נגדיר $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

ונגדיר עקומה $\gamma(t) = (t, f(t))$ כאשר $t \in [0,1]$. האם העקומה הנ"ל היא בעלת אורך?

<u>פתרון:</u>

לא. נשים לב שעבור $k \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$f(\frac{1}{k}) = \begin{cases} \frac{1}{k} & k = 2m \\ -\frac{1}{k} & k = 2m+1 \end{cases}$$

ונקבל:

$$||\gamma(\frac{1}{k}) - \gamma(\frac{1}{k+1})|| \geq |f(\frac{1}{k}) - f(\frac{1}{k+1})| \geq \frac{1}{k}$$

ואם נתבונן בחלוקות: $T_n : 0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{1}{2} < 1$ אורך הקו הפוליגונלי המתאים לחלוקה זו יהיה גדול מהסכום:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

שמתבדר לאינסוף כאשר $n \to \infty$. לכן המסילה אינה בעלת אורך.