חדו"א 2 - תרגיל מס' 1

1. מהו אוסף הפונקציות הקדומות של הפונקציה f על הקבוצה A במקרים הבאים:

(א) $$A = \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < \pi/4 \\ \cos x & x \geq \pi/4 \end{cases}$$

(ב) $A = (0,1) \cup (2,3)$, $f(x) = x^2$

2. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$$a. \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx \qquad b. \int (1-x)(1-2x)(1-3x)dx$$

$$c. \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx, \quad x \geq 0 \qquad d. \int (3x-7)^{12}dx$$

$$e. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^5}dx, \quad x \geq 0 \qquad f. \int \frac{x^2+5}{x^2+1}dx$$

$$g. \int \sqrt{1 - \cos^2(x)}dx, \quad 0 \leq x \leq \pi \qquad h. \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x}dx$$

$$i. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx, \quad a > 0 \qquad j. \int \frac{\sin x}{\sqrt{2(1+\cos x)}}dx$$ (רמז: זווית כפולה)

3. השתמשו באינטגרציה בחלקים כדי לחשב את האינטגרלים הבאים:

$$a. \int xe^{-2x}dx \qquad b. \int \sin(\ln x)dx \qquad c. \int x\ln^2 x dx$$

$$d. \int \frac{\ln x}{x^2}dx \qquad e. \int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx \qquad f. \int \sqrt{1-x^2}dx,$$

$$g. \int e^{2x}\sin 3x dx \qquad h. \int x^n \ln x dx$$

4. השתמשו באינטגרציה בחלקים ומיצאו נוסחא ריקורסיבית ל- I_m במקרים הבאים:

(א) $$I_m = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$$

(ב) $I_m = \int x^\alpha \ln^m x dx$ כאשר $\alpha \neq -1$.

5. חשבו את האינטגרלים הבאים ע"י הצבה מתאימה או בכל דרך אחרת:

$$a. \int \frac{1}{1-x}dx \qquad b. \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \qquad c. \int \frac{x^7}{1-x^4}dx$$

$$d. \int x^2\sqrt[3]{1+x^3}dx \qquad e. \int \frac{dx}{x\ln|x|} \qquad f. \int \frac{e^x}{e^x + \sqrt{e^x}}dx$$

$$g. \int \frac{e^x+2}{e^x+4+7e^{-x}}dx \qquad h. \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx \qquad i. \int \ln\sqrt[17]{x^2+7x+12}dx$$

$$j. \int \cot(x)dx \qquad k. \int x\exp(-x^2/2)dx \qquad l. \int x^3\exp(-x^2)dx$$

$$m. \int e^{\sqrt{x}}dx \qquad n. \int xe^x\cos x dx$$

$$o. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$$ (נסו $t - x = \sqrt{a^2+x^2}$)

6. יהי $P(x)$ פולינום. הוכיחו ש-

$$\int P(x)e^x dx = Q(x)e^x + C\ ,$$

כאשר $Q(x)$ הוא פולינום ממעלה $\deg Q = \deg P$.

פתרון תרגיל מס' 1 בחדו"א 2

(1) (א) קדומה F $(F'=f)$ תהיה מהצורה -

$$F(x)=\begin{cases} -\cos x + C_1 & x<\frac{\pi}{4} \\ \sin x + C_2 & x\geq\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

על מנת ש-F תהיה גזירה ב-$\frac{\pi}{4}$ צריך שיתקיים -

(רציפות ב-$\frac{\pi}{4}$)

$$-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+C_1=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+C_2 \Rightarrow C_1=\sqrt{2}+C_2$$

במקרה זה F גזירה, ולכן

אוסף הקדומות של f מתואר ע"י -

$$F(x)=\begin{cases} -\cos x + C+\sqrt{2} & x<\frac{\pi}{4} \\ \sin x + C & x\geq\frac{\pi}{4}\end{cases} \quad (C\in\mathbb{R})$$

(ב)

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^3}{3}+C_1 & x\in(0,1) \\ \frac{x^3}{3}+C_2 & x\in(2,3)\end{cases} \qquad (F'(x)=f(x))$$

F גזירה לכל בחירה של $C_1,C_2\in\mathbb{R}$

(2)

א. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2dx=\int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx=\int\frac{dx}{x^2}-2\int\frac{dx}{x}+\int dx=-\frac{1}{x}-2\ln|x|+x+C$

ב. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)\,dx=\int(1-6x+11x^2-6x^3)\,dx=x-\frac{3x^2}{2}+\frac{11x^3}{3}-\frac{3x^4}{2}+C$

ג. $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int(1-x^{-2})x^{\frac{3}{4}}dx=\int x^{\frac{3}{4}}dx-\int x^{-\frac{5}{4}}dx=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C$

ד. $\int(3x-7)^{12}=\frac{1}{13\cdot3}(3x-7)^{13}+C$

ה. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^5}dx=\int\frac{\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}}{x^5}dx=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^5}dx=\int\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^7}\right)dx=$

$=-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^6}+C$

ו. $\int\frac{x^2+5}{x^2+1}dx=\int\left(1+\frac{4}{x^2+1}\right)dx=x+4\arctan x+C$

ז. $\underset{x\in[0,\pi]}{\int}\sqrt{1-\cos^2x}\,dx=\int\sqrt{\sin^2x}\,dx=\int\sin x\,dx=-\cos x+C$ בתחום $[0,\pi]$

ב-$[0,\pi]$, $\sin x\geq0$.

ח. $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx=\int\left(\frac{2\cdot2^x}{10^x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{5^x}{10^x}\right)dx=2\int\left(\frac{1}{5}\right)^xdx-\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^xdx=$

$=\frac{2}{\ln\left(\frac{1}{5}\right)}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-\frac{1}{5\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+C=-\frac{2}{\ln5\cdot5^x}+\frac{1}{5\ln2\cdot2^x}+C$

ט. $\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)}{1/a}+C=\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)+C$

(2) - המשך

ד.

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2(1+\cos x)}}dx = \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sqrt{2(1+2\cos^2\frac{x}{2}-1)}}dx = \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sqrt{\cos^2\frac{x}{2}}}dx =$$

$$= \begin{cases} \int \sin\frac{x}{2}dx & \cos^2\frac{x}{2}>0 \Rightarrow -\pi+4\pi k<x<\pi+4\pi k \\ -\int \sin\frac{x}{2}dx & \cos^2\frac{x}{2}<0 \Rightarrow \pi+4\pi k<x<3\pi+4\pi k \end{cases} = \begin{cases} -2\cos\frac{x}{2}+C_k & x\in(-\pi+4\pi k, \pi+4\pi k) \\ 2\cos\frac{x}{2}+\tilde{C}_k & x\in(\pi+4\pi k, 3\pi+4\pi k) \end{cases}$$

לכל בחירת $(C_k),(\tilde{C}_k)\in\mathbb{R}$ תהיה פונקציה מוגדרת בתחום הגדרתה של הפונקציה המקורית.

(3) א.

$$\int xe^{-2x}dx = \begin{bmatrix} f=x & g'=e^{-2x} \\ f'=1 & g=-\frac{1}{2}e^{-2x} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}xe^{-2x}+\int\frac{1}{2}e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C = -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1)+C$$

ב.

$$\int \sin(\ln x)dx = \begin{bmatrix} t=\ln x \\ dt=\frac{dx}{x}=\frac{dx}{e^t} \end{bmatrix} = \int e^t \sin t\, dt$$

$$I(t)=\int e^t\sin t\,dt = \begin{bmatrix} f=e^t & g'=\sin t \\ f'=e^t & g=-\cos t \end{bmatrix} = -e^t\cos t+\int e^t\cos t\,dt = \begin{bmatrix} f=e^t & g'=\cos t \\ f'=e^t & g=\sin t \end{bmatrix} =$$

$$= -e^t\cos t+e^t\sin t-\int e^t\sin t = e^t(\sin t-\cos t)-I(t) \Rightarrow$$

$$I(t)=\frac{1}{2}e^t(\sin t-\cos t)+C \Rightarrow$$

$$\int \sin(\ln x)dx = \frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C$$

ג.

$$\int x\ln^2 x\,dx = \begin{bmatrix} f=\ln^2 x & g'=x \\ f'=\frac{2\ln x}{x} & g=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\int x\ln x\,dx = \begin{bmatrix} f=\ln x & g'=x \\ f'=\frac{1}{x} & g=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln^2 x-\frac{1}{2}x^2\ln x+\frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C$$

ד.

$$\int \frac{\ln x}{x^2}dx = \begin{bmatrix} f=\ln x & g'=\frac{1}{x^2} \\ f'=\frac{1}{x} & g=-\frac{1}{x} \end{bmatrix} = -\frac{\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$$

ה.

$$\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx = \begin{bmatrix} f=\ln\frac{1+x}{1-x} & g'=x \\ f'=\frac{1-x}{1+x}\cdot\left(\frac{2}{(1-x)^2}\right) & g=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{2x^2}{2(1+x)(1-x)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\frac{x^2}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\int\left(\frac{1}{1-x^2}-1\right)dx = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)dx+\int dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\ln|1-x|-\frac{1}{2}\ln|1+x|+x+C = \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+x+C$$

המשך - 3

$$I(x)=\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\begin{bmatrix} f=\sqrt{1-x^2} & g'=1 \\ f'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & g=x\end{bmatrix}=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx=$$ ו.

$$=x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}-\int\sqrt{1-x^2}\,dx=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x-I(x)\quad\Rightarrow$$

$$I(x)=\tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right)+C$$

$$I(x)=\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\begin{bmatrix} f=\sin 3x & g'=e^{2x} \\ f'=3\cos 3x & g=\frac{1}{2}e^{2x}\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx=$$ ב.

$$=\begin{bmatrix} f=\cos 3x & g'=e^{2x} \\ f'=-3\sin 3x & g=\frac{1}{2}e^{2x}\end{bmatrix}=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\tfrac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx\right)=$$

$$=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x-\tfrac{9}{4}I(x)\quad\Rightarrow$$

$$\tfrac{13}{4}I(x)=\tfrac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{4}e^{2x}\cos 3x\Rightarrow I(x)=\tfrac{2}{13}e^{2x}\sin 3x-\tfrac{3}{13}e^{2x}\cos 3x+C$$

$$\int x^n\ln x\,dx=\begin{bmatrix} f=\ln x & g'=x^n \\ f'=\frac{1}{x} & g=\frac{x^{n+1}}{n+1}\end{bmatrix}=\frac{x^{n+1}\ln x}{n+1}-\frac{1}{n+1}\cdot\int x^n dx=$$ ח.

$$=\frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}\ln x-\frac{1}{(n+1)^2}\cdot x^{n+1}+C$$

4 א.

$$I_m=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^m}=\begin{bmatrix} f=\frac{1}{(x^2+a^2)^m} & g'=1 \\ f'=\frac{-2mx}{(x^2+a^2)^m} & g=x\end{bmatrix}=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\int\frac{1}{(x^2+a^2)^m}dx-2ma^2\int\frac{1}{(x^2+a^2)^{m+1}}dx=$$

$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^m}+2m\,I_m-2ma^2 I_{m+1}\Rightarrow\boxed{I_{m+1}=\frac{x}{2ma^2(x^2+a^2)^m}+\frac{2m-1}{2ma^2}I_m}$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\int\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx=\boxed{\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C}$$

ב.

$$I_m=\int x^\alpha\ln^m x\,dx=\begin{bmatrix} f=\ln^m x & g'=x^\alpha \\ f'=\frac{m}{x}\ln^{m-1}x & g=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\end{bmatrix}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^m x-\frac{m}{\alpha+1}\cdot\int x^\alpha\ln^{m-1}x\,dx\Rightarrow$$

$$\boxed{I_m=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln^m x-\frac{m}{\alpha+1}I_{m-1}}$$

$$\boxed{I_1=\int x^\alpha\ln x\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\ln x-\frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}+C}$$ (תרגיל 3ח)

$$\int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + C$$ א.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t=x-1 \\ dt=dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t^2}\,dx = -\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{x-1}+C$$ ב.

$$\int \frac{x^7}{1-x^4}\,dx = \begin{bmatrix} t=1-x^4 \\ dt=-4x^3dx \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\int \frac{x^4}{1-x^4}\cdot(-4x^3dx) = -\frac{1}{4}\int \frac{1-t}{t}\,dt =$$ ג.

$$= -\frac{1}{4}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{4}\int dt = -\frac{1}{4}\ln|t| + \frac{1}{4}t + \tilde{C} = -\frac{1}{4}\ln|1-x^4| - \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,dx = \begin{bmatrix} t=1+x^3 \\ dt=3x^2dx \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot t^{\frac{4}{3}}+C = \frac{1}{4}(1+x^3)^{\frac{4}{3}}+C$$ ד.

$$\int \frac{dx}{x\ln|x|} = \begin{bmatrix} t=\ln|x| \\ dt=\frac{1}{x}dx \end{bmatrix} = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t|+C = \ln|\ln|x||+C$$ ה.

$$\int \frac{e^x}{e^x+\sqrt{e^x}}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sqrt{e^x} \\ dt=\frac{1}{2}\sqrt{e^x}\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{t^2+t}\cdot\frac{2}{t}\,dt = 2\int \frac{1}{t+1}\,dt =$$ ו.

$$= 2\ln|t+1| + C = 2\ln|\sqrt{e^x}+1| + C$$

$$\int \frac{e^x+2}{e^x+4+7e^{-x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}+2e^x}{e^{2x}+4e^x+7}\,dx = \begin{bmatrix} t=e^{2x}+4e^x+7 \\ dt=2e^{2x}+4e^x \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$ ז.

$$= \frac{1}{2}\ln|e^{2x}+4e^x+7| + C$$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t=\arctan x \\ dt=\frac{1}{1+x^2}dx \end{bmatrix} = \int t^2dt = \frac{t^3}{3}+C = \frac{1}{3}\arctan^3 x + C$$ ח.

$$\int \ln\sqrt[17]{x^2+7x+12}\,dx = \frac{1}{17}\int \ln(|x+3|\cdot|x+4|)\,dx = \frac{1}{17}\int \ln|x+3|\,dx + \frac{1}{17}\int \ln|x+4|\,dx =$$ ט.

$$= \begin{bmatrix} f=\ln|x+3| & g'=1 \\ f'=\frac{1}{x+3} & g=x+3 \end{bmatrix} = \frac{1}{17}(x+3)\ln|x+3| - \frac{1}{17}\int dx + \frac{1}{17}\int \ln|x+4|\,dx = \begin{bmatrix} f=\ln|x+4| & g'=1 \\ f'=\frac{1}{x+4} & g=x+4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{17}(x+3)\ln|x+3| - \frac{x}{17} + \frac{1}{17}(x+4)\ln|x+4| - \int dx = \frac{1}{17}\Big((x+3)\ln|x+3| + (x+4)\ln|x+4| - 2\Big) + C$$

$$\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \begin{bmatrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t|+C = \ln|\sin x|+C$$ י.

$$\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \begin{bmatrix} t=-\frac{x^2}{2} \\ dt=-x\,dx \end{bmatrix} = -\int e^t dt = -e^t+C = -e^{-\frac{x^2}{2}}+C$$ יא.

$$\int x^3e^{-x^2}\,dx = \begin{bmatrix} t=-x^2 \\ dt=-2x\,dx \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int te^t\,dt = \begin{bmatrix} f(t)=t & g'(t)=e^t \\ f'(t)=1 & g(t)=e^t \end{bmatrix} =$$ יב.

$$= \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t(t-1)+C = \frac{1}{2}e^{-x^2}(-x^2-1)+C$$

(5.) ב'.

$$\int e^{\sqrt{x}}dx=\begin{bmatrix} t=\sqrt{x} \\ dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\end{bmatrix}=2\int te^t\,dt=2e^t(t-1)+C=2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$$

ג'. ראשית נחשב -

$$\int e^x\cos x\,dx=\begin{bmatrix} f=e^x & g'=\cos x \\ f'=e^x & g=\sin x\end{bmatrix}=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} f=e^x & g'=\sin x \\ f'=e^x & g=-\cos x\end{bmatrix}=e^x\sin x+e^x\cos x-\int e^x\cos x\,dx \Rightarrow \int e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$$

כעת

$$I(x)=\int xe^x\cos x=\begin{bmatrix} f=xe^x & g'=\cos x \\ f'=(x+1)e^x & g=\sin x\end{bmatrix}=xe^x\sin x-\int(x+1)e^x\sin x\,dx=$$

$$=\begin{bmatrix} f=(x+1)e^x & g'=\sin x \\ f'=(x+2)e^x & g=-\cos x\end{bmatrix}=xe^x\sin x+(x+1)e^x\cos x-\int(x+2)e^x\cos x\,dx=$$

$$=xe^x\sin x+(x+1)e^x\cos x-I(x)-2\int e^x\cos x\,dx \Rightarrow$$

$$I(x)=\frac{1}{2}e^x\left(x\sin x+(x+1)\cos x-(\sin x+\cos x)\right)+C=\frac{1}{2}e^x\left((x-1)\sin x+x\cos x\right)+C$$

.16

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\begin{bmatrix} t=x+\sqrt{a^2+x^2} \\ dt=\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+1\right)dx=\frac{t}{\sqrt{x^2+a^2}}dx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C$$

(6.) נראה באינדוקציה - $\int x^ne^x dx=Q_n(x)e^x+C$ כאשר Q_n פולינום מתוקן ממעלה n.

עבור $n=0$ - $\int e^x dx=1\cdot e^x+C$ ← $Q_0=1$ - ממעלה אפס.

$$\int x^ne^x dx=\begin{bmatrix} f=x^n & g=e^x \\ f'=nx^{n-1} & g'=e^x\end{bmatrix}=x^n\cdot e^x-n\int x^{n-1}e^x dx \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{=} e^x(x^n-nQ_{n-1}(x))+C$$

$Q_n=x^n-nQ_{n-1}$ הוא פולינום מתוקן ממעלה n.

מלינאריות האינטגרל אפשר להרחיב את התוצאה לפולינום ממעלה n $P(x)$,

ולקבל $\int P(x)e^x dx=Q(x)e^x+C$

עם $Q(x)$ פולינום ממעלה n כנדרש.

<u>חדו"א 2 - תרגיל מס' 2</u>

1. פרקו את הפונקציות הרציונליות הבאות לשברים חלקיים:

$a.\ \dfrac{x^4-3x^3+x^2+4x-1}{x^2-x-1}$ $\quad b.\ \dfrac{x^5-3x^3+x}{x^2+2x+1}$

$c.\ \dfrac{x^n}{x-1}$ (n טבעי) $\quad d.\ \dfrac{1}{(x-a)(x^2+px+q)}$ (עבור $p^2-4q<0$)

$e.\ \dfrac{x-1}{x^3(x^2+1)}$ $\quad f.\ \dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}$

2. חשבו את האינטגרלים הבאים:

$a.\ \displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+3x+2}$ $\quad b.\ \displaystyle\int \frac{x^4}{x^3-1}\,dx$

$c.\ \displaystyle\int \frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$ $\quad d.\ \displaystyle\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-6}$

$e.\ \displaystyle\int \frac{x^3+2}{(x^2-1)^2}\,dx$ $\quad f.\ \displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+4x+5)^2}$

$g.\ \displaystyle\int \frac{dx}{\cos x}$ $\quad h.\ \displaystyle\int \sin(ax)\cos(bx)dx, \quad (a,b\in\mathbb{R})$

$i.\ \displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$ $\quad j.\ \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}, \quad |x|>|a|>0,$ (נסו $x=\dfrac{a}{\cos t}$)

$k.\ \displaystyle\int \frac{\sin x+2\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}\,dx$ $\quad l.\ \displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$

$m.\ \displaystyle\int \tan^4 x\,dx$ $\quad n.\ \displaystyle\int \frac{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}{x-1}\,dx$

$o.\ \displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}\,dx$ $\quad p.\ \displaystyle\int \frac{x^4}{\sqrt{x^{10}-2}}\,dx$

3. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית ממש וגזירה, ותהי F פונקציה קדומה של f (כלומר, $F'=f$). הוכיחו ש-

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C\,.$$

4. הוכיחו או הפריכו (בעזרת קריטריון דרבו או בכל דרך אחרת):

(א) אם $|f|$ אינטגרבילית רימן, אז גם f אינטגרבילית.

(ב) אם g אינטגרבילית רימן ו $\frac{1}{g}$ חסומה, אזי $\frac{1}{g}$ אינטגרבילית רימן

5. נניח ש- $f\geq 0$ אינטגרבילית ב- $[a,b]$, רציפה בנקודה $x_0\in(a,b)$ ומקיימת ש- $f(x_0)>0$. הוכיחו ש- $\int_a^b f>0$.

6. ★ הוכיחו או הפריכו: נניח ש- $f(x)>0$ לכל $x\in[a,b]$ וש- f אינטגרבילית ב- $[a,b]$. אזי $\int_a^b f>0$.

Calculus 2 - Solution of Exercise Sheet No. 2

March 14, 2011

1. This question is rather technical, so we solve only a selected few exercises:

   (a)

   (b)

   (c) We can perform division of polynomials, but there's a shorter way:

   $$\frac{x^n}{x-1} = \frac{x^n - 1 + 1}{x-1} = \frac{x^n - 1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \left(1 + x + \ldots + x^{n-1}\right) + \frac{1}{x-1}$$

   when the last equality uses the formula for sum of a geometric sequence.

   (d) Since the discriminant is negative, the term $x^2 + px + q$ is irreducible, and so we write:

   $$\begin{aligned} \frac{1}{(x-a)\left(x^2+px+q\right)} &= \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q} = \frac{A\left(x^2+px+q\right) + (Bx+C)(x-a)}{(x-a)\left(x^2+px+q\right)} = \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (Ap - aB + C)x + (Aq - aC)}{(x-a)\left(x^2+px+q\right)} \end{aligned}$$

   We equate the corresponding coefficients of the polynomials on each side, to get:

   $$1 = (A+B)x^2 + (Ap - aB + C)x + (Aq - aC) \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ Ap - aB + C = 0 \\ Aq - aC = 1 \end{cases}$$

   Solving for A,B,C we get:

   $$A = \frac{1}{a^2+pa+q} \; ; \; B = \frac{-1}{a^2+pa+q} \; ; \; C = -\frac{p+a}{a^2+pa+q}$$

   Notice that the restriction $p^2 - 4q < 0$ means that the equation $x^2 + px + q = 0$ has no real solutions, and thus $a^2 + pa + q \neq 0$.
   To conclude:

   $$\frac{1}{(x-a)\left(x^2+px+q\right)} = \frac{1}{\left(a^2+pa+q\right)(x-a)} - \frac{x+p+a}{\left(a^2+pa+q\right)\left(x^2+px+q\right)}$$

   One can check the correctness of this decomposition by adding the two fractions.

   (e) Notice that the discriminant of the denominator is $\triangle = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$, and thus it is irreducible.
   Therefoere we write:

   $$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2x^2+3x+2} &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 2\cdot\frac{3}{4}x + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 2\cdot\frac{3}{4}x + \frac{9}{16} + \frac{7}{16}} = \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{7}\cdot\int \frac{dx}{\frac{16}{7}\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + 1} = \\ &= \frac{8}{7}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right)^2 + 1} = \frac{8}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{3}{4}\right)\right) + C \end{aligned}$$

(f) Here we can perform division of polynomials, but it isn't necessary:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4dx}{x^3-1} &= \int\frac{x^4-x+x}{x^3-1}dx=\int\frac{x\left(x^3-1\right)}{x^3-1}dx+\int\frac{xdx}{x^3-1}= \\ &= \frac{x^2}{2}+\int\frac{xdx}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}=\frac{x^2}{2}+\int\frac{A}{(x-1)}dx+\int\frac{Bx+C}{\left(x^2+x+1\right)}dx\end{aligned}$$

Now find suitable A, B and C and we are done!

(g) Routinely:

$$\int\frac{2x+1}{x(x-1)(x+2)}dx=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{B}{x-1}dx+\int\frac{C}{x+2}dx$$

And again all that is left is to find suitable A, B and C.

(h) Here we use change of variables to get to rational function:

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{e^{2x}+e^x-6} &= \begin{bmatrix} t=e^x\Rightarrow dt=e^xdx \\ \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{t}\end{bmatrix}=\int\frac{dt/t}{t^2+t-6}=\int\frac{dt}{t(t+3)(t-2)}= \\ &= \int\frac{A}{t}dt+\int\frac{B}{t+3}dt+\int\frac{C}{t-2}dt\end{aligned}$$

Again, find suitable constants to finish. Don't forget to change t back to e^x at the end!

(i) Same old process:

$$\int\frac{x^3+2}{\left(x^2-1\right)^2}dx=\int\frac{x^3+2}{(x-1)^2(x+1)^2}dx=\int\frac{A}{x-1}dx+\int\frac{B}{(x-1)^2}dx+\int\frac{C}{x+1}dx+\int\frac{D}{(x+1)^2}dx$$

and so forth.

(j) Again we notice that the discriminant of x^2+4x+5 in the denominator is negative, and so we write:

$$\int\frac{dx}{x\left(x^2+4x+5\right)^2}=\int\frac{A}{x}dx+\int\frac{Bx+C}{x^2+4x+5}dx+\int\frac{Dx+E}{\left(x^2+4x+5\right)^2}dx$$

and so on.

(k) This is a trigonometric rational function, and it is odd w.r.t $\cos x$, and therefore a suitable change of variables would be $t=\sin x$. But we have to figure out a way to perform this substitution:

$$\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{\cos x}{\cos^2x}dx=\int\frac{\cos x}{1-\sin^2x}dx=\begin{bmatrix} t=\sin x\Rightarrow \\ dt=\cos xdx\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{1-t^2}=\int\frac{A}{1-t}dt+\int\frac{B}{1+t}dt=\dots$$

(l) Here we just need to use a trigonometric identity:

$$\begin{aligned}\int\sin(ax)\cos(bx)\,dx &= \frac{1}{2}\int\sin(a+b)\,xdx+\int\sin(a-b)\,xdx= \\ &= \frac{1}{2(b-a)}\cos(a-b)\,x-\frac{1}{2(a+b)}\cos(a+b)\,x+C\end{aligned}$$

(m) We have a trigonometric rational function, which is even w.r.t. both $\sin x$ and $\cos x$. Typically in this situation, we would like to use the substitution $t = \tan x$ (which would work!), but there is an easier trick here:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$$

(n) We perform the substitution in the hint:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \left[x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt\right] = \int \frac{\frac{a \sin t}{\cos^2 t} dt}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2}} = \int \frac{a \sin t dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{a^2(1-\cos^2 t)}{\cos^2 t}}} \\ &= \int \frac{a \sin t dt}{a \frac{\cos^2 t}{\cos t} \sqrt{\sin^2 t}} = \int \frac{a \sin t dt}{a \cos t \sin t} = \int \frac{dt}{\cos t}\end{aligned}$$

and thus we have magically received an integral we've already solved. Don't forget to switch back from t to $\arccos\left({}^{a}/{}_{x}\right)$ (this expression is well-defined because of the limitation $|x| > |a| > 0$).

(o) We seperate the integral:

$$\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx + \int \frac{2 \cos x}{\sin^2 x + 3 \sin x + 2} dx = I_1 + I_2$$

For the second integral, a simple substitution suffices:

$$I_1 = \begin{bmatrix} t = \sin x \Rightarrow \\ dt = \cos x dx \end{bmatrix} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 3t + 2} = 2 \left[\int \frac{A}{t+2} dt + \int \frac{B}{t+1} dt\right] = \ldots$$

For the first integral, however, we need the standard substitution for trigonometric rational functions, which yields:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{\sin x}{(\sin x + 2)(\sin x + 1)} dx = \begin{bmatrix} t = \tan\left({}^{x}/{}_{2}\right) \Rightarrow \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{bmatrix} = \\ &= \int \frac{4t dt}{\left(\frac{2t}{1+t^2} + 2\right)\left(\frac{2t}{1+t^2} + 1\right)} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} = \int \frac{2t dt}{(t+1+t^2)(2t+1+t^2)} = \\ &= \int \frac{2t dt}{(t^2+t+1)(t+1)^2} = \int \frac{At+B}{(t^2+t+1)} dt + \int \frac{C}{t+1} dt + \int \frac{D}{(t+1)^2} dt = \ldots \end{aligned}$$

(p) We would like to substitute $t = \sin x$, so we use a trigonometric identity:

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} dx &= \int \frac{\cos x}{\sqrt{1 - 2 \sin^2 x}} dx = \begin{bmatrix} t = \sqrt{2} \sin x \Rightarrow \\ dt = \sqrt{2} \cos x dx \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ &= = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arccos t = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arccos\left(\sqrt{2} \sin x\right) + C\end{aligned}$$

(q) It's possible to use the usual trigonometric substitution $t = \tan \frac{x}{2}$, but that would give a very long and complicated solution. Instead we use the fact that $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ to write:

$$\begin{aligned} I_m &= \int \tan^m x dx = \int \tan^{m-2} x \cdot \tan^2 x dx = \int \tan^{m-2} x \cdot \left\{\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right\} dx = \\ &= \int \tan^{m-2} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int \tan^{m-2} x dx = J - I_{m-2} \end{aligned}$$

which is true for all m. Now notice that:

$$J=\int \tan^{m-2}x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\begin{bmatrix} t=\tan x\Rightarrow \\ dt=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\end{bmatrix}=\int t^{m-2}dt=\frac{t^{m-1}}{m-1}=\frac{\tan^{m-1}x}{m-1}+C$$

which means that for all natural $m\geq 3$:

$$I_m=\frac{\tan^{m-1}x}{m-1}-I_{m-2}$$

This is a formula worth knowing, but we'll only use it in the case $m=4$:

$$\int \tan^4 x dx=\frac{\tan^3 x}{3}-\int \tan^2 x dx=\frac{\tan^3 x}{3}-\int\left\{\frac{1}{\cos^2 x}-1\right\}dx=\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x+C$$

(r) Here the discriminant of $4x^2-x+1$ is negative, so we should use Euler's substitution. The usual substitution is $\sqrt{4x^2-x+1}=t-2x$, but we will use $\sqrt{4x^2-x+1}=t+2x$, for reasons that will become apparent:

$$\begin{aligned}\int\frac{2x-\sqrt{4x^2-x+1}}{x-1}dx &= \begin{bmatrix}\sqrt{4x^2-x+1}=t+2x\Rightarrow x=\dfrac{1-t^2}{4t+1} \\ dx=-\dfrac{4t^2+2t+4}{(4t+1)^2}dt\end{bmatrix}= \\ &= \int\frac{2x-t-2x}{\frac{1-t^2}{4t+1}-1}\cdot-\frac{4t^2+2t+4}{(4t+1)^2}dt=\int\frac{t\left(4t^2+2t+4\right)}{-t\,(t+4)\,(4t+1)}dt= \\ &= \int\frac{-\left(4t^2+2t+4\right)}{(t+4)\,(4t+1)}dt=\frac{1}{4}\left\{\int\frac{A}{t+4}dt+\int\frac{B}{t+{}^1\!/_4}dt\right\}=\ldots\end{aligned}$$

(s) We use the usual substitution for this type of integrals:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}dx=\begin{bmatrix}t=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow x-1=t^3 \\ dx=3t^2dt\end{bmatrix}=\int\frac{t}{t^3}\cdot 3t^2dt=3\int dt=3t=3\sqrt[3]{x-1}+C$$

But at this moment we might realize that this is silly, and just write:

$$\int\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}dx=\int(x-1)^{-2/3}dx=\frac{(x-1)^{1/3}}{1/3}=3\sqrt[3]{x-1}+C$$

(t) First we simplify the integrand using a simple substitution:

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\begin{bmatrix}t=x^5\Rightarrow \\ dt=5x^4dx\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}}$$

Now the radicand (meaning the expression inside the root) is reducible, and can be written as $t^2-2=\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)$. This means we need a different type of Euler subtitution. Generally speaking, when dealing with an expression of the form $\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}$, one should substitute: $\sqrt{a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)}=(x-\alpha)\,t$, which yields:

$$a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)=(x-\alpha)^2\,t^2\Rightarrow x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2}$$

And now we can express both $\sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}$ and dx in terms of rational expressions in t. In our case, we substitute:

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)} &= \left(t+\sqrt{2}\right)u \Rightarrow t=\frac{\sqrt{2}\left(u^2+1\right)}{1-u^2} \Rightarrow dt=\frac{4\sqrt{2}u}{\left(1-u^2\right)^2}du \\
\sqrt{t^2-2} &= \sqrt{\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right)}=\left(t+\sqrt{2}\right)u=\left[\frac{\sqrt{2}\left(u^2+1\right)}{1-u^2}+\sqrt{2}\right]u=\frac{2\sqrt{2}u}{1-u^2}
\end{aligned}$$

And the integral becomes:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2}} &= \frac{1}{5}\int\frac{4\sqrt{2}u/\left(1-u^2\right)^2}{2\sqrt{2}u/1-u^2}du=\frac{2}{5}\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{5}\left\{\int\frac{du}{1+u}+\int\frac{du}{1-u}\right\}= \\
&= \frac{1}{5}\ln|1+u|-\frac{1}{5}\ln|1-u|=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}+\sqrt{t^2-2}}{t+\sqrt{2}}\right|-\frac{1}{5}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}-\sqrt{t^2-2}}{t+\sqrt{2}}\right|= \\
&= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{t+\sqrt{2}+\sqrt{t^2-2}}{t+\sqrt{2}-\sqrt{t^2-2}}\right|=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{x^5+\sqrt{2}+\sqrt{x^{10}-2}}{x^5+\sqrt{2}-\sqrt{x^{10}-2}}\right|+C
\end{aligned}$$

Multiplication of the enumerator and the denominator by $x^5+\sqrt{2}+\sqrt{x^{10}-2}$ will now yield:

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{x^{10}-2}}=\frac{1}{5}\ln\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right)\right|+C=\frac{1}{5}\ln\left|\left(x^5+\sqrt{x^{10}-2}\right)\right|+C$$

(since the term $-\frac{1}{5}\ln\left(1/\sqrt{2}\right)$ is expressed in the constant C.

2. Since f is strictly monotonic, we can perform the change of variables $x=f(t)$, which means that $dx=f'(t)\,dt$. Thus:

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(x)\,dx &= \int f^{-1}(f(t))\cdot f'(t)\,dt=\int t\cdot f'(t)\,dt=\begin{bmatrix} u=t\Rightarrow u'=1 \\ v'=f'(t)\Rightarrow v=f(t)\end{bmatrix}= \\
&= t\cdot f(t)-\int f(t)\,dt=t\cdot f(t)-F(t)+C
\end{aligned}$$

where the last two equalities use integration by parts, and the fact that $F'=f$.
Now use $t=f^{-1}(x)$ to get:

$$\int f^{-1}(x)\,dx=f^{-1}(x)\cdot f\left(f^{-1}(x)\right)-F\left(f^{-1}(x)\right)+C=x\cdot f^{-1}(x)-F\left(f^{-1}(x)\right)+C$$

Notice that it is *not* a correct solution to differentiate both sides, and see that the derivatives are equal, since we can't be sure that f^{-1} is differentiable!
For example, take $f(x)=x^3$. It is infinitely-differentiable and strictly increasing on the entire real-line, but its inverse $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ is not differentiable at 0! (it has a sort of "∞" derivative there).
This is because $f'(0)=0$, which doesn't fit the conditions of the inverse-function theorem.

3. The first claim is FALSE and the second is TRUE.

(a) A simple counterexample would be taking $f(x):=2D(x)-1$, when D is the Dirichlet function on the segment $[0,1]$. This is a sort of "symmetrization" of the Dirichlet funtion around the x-axis. Namely:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ -1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

Now f is not integrable on $[0,1]$, since otherwise $D=\frac{f+1}{2}$ would also be integrable on $[0,1]$, which we know is wrong. But $|f|\equiv 1$ and thus integrable on $[0,1]$.

(b) $1/g$ is bounded on $[a,b]$, so we can take $M>0$ such that $|1/g|<M$ on this segment.
g is integrable on $[a,b]$, so according to Darboux Criterion, for all $\eta>0$ we can find $\lambda>0$ such that for every partition P of the segment $[a,b]$ with parameter $\lambda(P)<\lambda$, the oscillation of g with respect to the partition P is smaller than η.
Namely $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\,\Delta x_i<\eta$, when $\omega_i(g)=M_i(g)-m_i(g)=\sup_{[x_{i-1},x_i]}g-\inf_{[x_{i-1},x_i]}g$ is the osscilation of g at the segment $[x_{i-1},x_i]$.
Now we need to bound the oscillation of $1/g$ from above. To do this we use a claim from class:

$$\omega_i(1/g)=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\left\{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(y)}\right\}=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\frac{g(y)-g(x)}{g(x)\cdot g(y)}=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\left|\frac{g(y)-g(x)}{g(x)\cdot g(y)}\right|$$

The last equality is due to the fact that for all $x,y\in[x_{i-1},x_i]$, $\frac{g(y)-g(x)}{g(x)\cdot g(y)}=-\frac{g(x)-g(y)}{g(y)\cdot g(x)}$, and thus any "large" negative expression that appears when taking the supremum will be accompanied by an qually large positive expression.
Now we can bound the oscillation like so:

$$\omega_i(1/g)=\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\frac{|g(y)-g(x)|}{|g(x)\cdot g(y)|}\le\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\frac{|g(y)-g(x)|}{M^2}=\frac{1}{M^2}\omega_i(g)$$

So for every $\varepsilon>0$, take $\eta=M^2\varepsilon$, and find $\lambda>0$ such that for every partition P of the segment $[a,b]$ with parameter $\lambda(P)<\lambda$, $\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\,\Delta x_i<\eta$, and thus:

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(1/g)\,\Delta x_i\le\frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\,\Delta x_i<\frac{1}{M^2}\eta=\varepsilon$$

Therefore, again by Darboux Criterion, $1/g$ is also Riemann integrable.

4. f is continuous at x_0, and thus for $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$ there is a $\delta>0$ such that for all $x\in[x-\delta,x+\delta]$, $|f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}f(x_0)\Rightarrow f(x)>\frac{1}{2}f(x_0)=\varepsilon>0$. Define:

$$h(x):=\begin{cases}\varepsilon & x\in[x-\delta,x+\delta]\\ 0 & x\notin[x-\delta,x+\delta]\end{cases}$$

Thus h is integrable on $[a,b]$, since it is piece-wise constant.
Now, Since f is non-negative, and for $x\in[x-\delta,x+\delta]$, $f(x)>\varepsilon$, we deduce that $f\ge h$ on $[a,b]$, and by monotonicity of the integral:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\ge \int_a^b h(x)\,dx=\int_a^{x-\delta}h(x)\,dx+\int_{x-\delta}^{x+\delta}h(x)\,dx+\int_{x+\delta}^{b}h(x)\,dx=\\ &=\int_a^{x-\delta}0dx+\int_{x-\delta}^{x+\delta}\varepsilon dx+\int_{x+\delta}^{b}0dx=0+\varepsilon\cdot2\delta+0=2\varepsilon\delta>0\end{aligned}$$

5. Assume that $\int_a^b f(x)\,dx=0$. We shall prove that $f(x_0)=0$ for some $x_0\in[a,b]$.
f is integrable, and thus the Upper-Darboux Sums converge to the integral, which is 0. Namely:

$$\lim_{\lambda(P)\to0}\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot\Delta x_i=0$$

Now take a partition P_n of $[a,b]$ to n equal parts, and for $\varepsilon=1$ there exists an $n\ge2$ large enough such that:

$$\sum_{i=1}^{n}\sup_{[x_{i-1},x_i]}f\cdot\Delta x_i<1$$

This implies the existence of some segment $I_1=[x_{i-1},x_i]$, where $f<1$ (otherwise, we would get a sum of n terms, each at least $1/n$, and reach a contradiction).

Notice that the length of the segment is $|I_1| \leq \frac{1}{2}(b-a)$ (this is the reason we took $n \geq 2$ - so that the length of the segment I_1 would be exponentially smaller that $[a, b]$).
Now f is integrable on $[a, b]$, and thus also integrable on $I_1 \subset [a, b]$, and since f is non-negative:

$$0 \leq \int_{I_1} f(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_{I_1} f(x)\,dx = 0$$

Thus we can repeat the process for f on the segment I_1 instead of $[a, b]$, to get a segment $I_2 \subset I_1$ with length $|I_2| \leq \frac{1}{2}|I_1| \leq \frac{1}{4}(b-a)$ where $f < \frac{1}{2}$ (by taking $\varepsilon = 1/2$).
Continuing in this way, we get a sequence of nested segments $[a, b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$ such that $f < 1/k$ on I_k, and:

$$|I_{k+1}| \leq \frac{1}{2}|I_k| \leq \frac{1}{4}|I_{k-1}| \leq \ldots \frac{1}{2^k}|I_1| \leq \frac{1}{2^{k+1}}|I_0| = \frac{b-a}{2^{k+1}} \longrightarrow 0 \; as \; k \longrightarrow \infty$$

Using Cantor's Theorem for a sequence of nested segments, we deduce that $\bigcap_{k=0}^{\infty} I_k = \{x_0\}$ for some $x_0 \in [a, b]$.
Now for all $k \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I_k$, and thus $0 \leq f(x_0) < 1/k$, and that can only be possible if $f(x_0) = 0$.

חדו"א 2 - תרגיל מס' 3

1. תהיינה f ו־ g אינטגרביליות רימן בקטע $[a,b]$. הוכיחו כי $\max\{f,g\}$ אינטגרבילית רימן.
2. תהי f אינטגרבילית ב־ $[a-1,b+1]$. הוכיחו ש־

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx = 0$$

(רמז: בחרו חלוקה π עם תנודה ε לכל היותר, והביטו ב־ $h < \min_i |x_{i+1}-x_i|$)

3. נניח ש־ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית וסימטרית ביחס למרכז הקטע $c=(a+b)/2$, כלומר, $f(a+x)=f(b-x)$ לכל $0\le x\le b-a$. הוכיחו ש־ $\int_a^b f = 2\int_a^c f$.
4. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית על כל קטע סופי ומחזורית עם מחזור $T>0$ (כלומר, $f(x+T)=f(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$). הוכיחו שהאינטגרל $I(a)=\int_a^{a+T} f(x)dx$ אינו תלוי ב־ a.
5. חשבו את האינטגרלים המסויימים הבאים:

$$a.\ \int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx \quad b.\ \int_{-1}^1\sqrt{(1-x^2)^3}dx \quad c.\ \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$$
$$d.\ \int_0^2 |1-x|dx \qquad e.\ \int_0^6 \lfloor x\rfloor \sin\frac{\pi x}{6}dx$$

6. חשבו את הנגזרות הבאות: $a.\ \dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}dt, \quad b.\ \dfrac{d}{dx}\int_{x-\sin x}^{\sin x}\arcsin(t)dt$
7. חשבו את גבול הסדרות הבאות:

$$a_n = \frac{1}{n^5}\left(1^4+2^4+\ldots+n^4\right), \qquad b_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n ie^{i^2/n^2}$$

8. הוכיחו ש־ $0<\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{x}dx<\frac{\pi^2}{64}$.
9. תהי f פונקציה גזירה ברציפות n פעמים בקטע $[a,b]$. השתמשו במשפט ערך הביניים האינטגרלי כדי להראות שקיימת $c\in(a,b)$ שעבורה

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1}dt$$

(כלומר, שארית לגרנז' לטור טיילור נובעת מהשארית האינטגרלית).

10. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה המקיימת $f(a)=f(b)=0$. הוכיחו שקיימת נקודת $c\in(a,b)$ עם $|f'(c)|\ge \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx$.
11. ★ תהי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה וקמורה[1] עם $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$. הוכיחו שקיים, סופי וחיובי הגבול

$$L=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n)-\int_1^n f(x)dx\right)$$

.

[1] כזכור, פונקציה נקראת קמורה אם $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ עבור $0\le\lambda\le 1$. במקרה של פונקציה גזירה, זה שקול לכך ש־ f' עולה.

חדו"א 2 - פתרונות נבחרים לתרגיל מס' 3

1. ראשית, נראה כי מתקיים האי־שיוויון הבא:

$$|\max\{f(x),g(x)\}-\max\{f(y),g(y)\}|\leq|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|.$$

אכן, ניתן לבדוק את אי־שיוויון זה ע"י הפרדה למקרים; אם $\max\{f(x),g(x)\}=f(x)$ ו־ $\max\{f(y),g(y)\}=f(y)$ או לחילופין אם $g(x),g(y)$ הם הערכים המקסימליים המתאימים, אז האי־שיוויון ברור. כעת נניח בה"כ ש־ $\max\{f(x),g(x)\}=f(x)$ ו־ $\max\{f(y),g(y)\}=g(y)$ ונפריד שוב לשני מקרים; $f(y)\leq g(y)\leq f(x)$ או $g(x)\leq f(x)\leq g(y)$. לכן $|f(x)-g(y)|\leq|f(x)-f(y)|$ או $|f(x)-g(y)|\leq|g(y)-g(x)|$ אך בכל מקרה האי־שיוויון שברצוננו להוכיח מתקיים כנדרש.

כעת, הטענה נובעת מיידית; לכל $\varepsilon>0$ נמצא חלוקה עבורה התנודה של f בקטע $[a,b]$ קטנה מספיק, כלומר $\sum\Delta x_i\omega_i(f)<\frac{\varepsilon}{2}$ וכן התנודה של g בקטע $[a,b]$ קטנה מספיק, כלומר $\sum\Delta x_i\omega_i(g)<\frac{\varepsilon}{2}$ ומכאן $\sum\Delta x_i\omega_i(\max\{f,g\})<\sum\Delta x_i\cdot(\omega_i(f)+\omega_i(g))<\varepsilon$. לכן, הפונקציה $\max\{f,g\}$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. $\square$

2. יהי $\varepsilon>0$. f אינטגרבילית ב $[a-1,b+1]$ ולכן לכל חלוקה עדינה מספיק של קטע זה (כלומר קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה π עם $\lambda(\pi)<\delta$) מתקיים

$$\omega(\pi,f):=\sum_i\Delta x_i\omega_i(f)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

נקח חלוקה $\pi: a=x_0<x_1<...<x_n=b$ של הקטע $[a,b]$ עם $\lambda(\pi)<\frac{\delta}{2}$, ונבנה שתי חלוקות של הקטע $[a-1,b+1]$ באופן הבא. את החלוקה הראשונה, שנסמנה ב π_{even}, נקבל מלקחת את נקודות החלוקה עם אינדקס זוגי של π, והוספת נקודות חלוקה מחוץ ל $[a,b]$ כך שיתקיים $\lambda(\pi_{even})<\delta$. באותו אופן נבנה את π_{odd} (שוב, עם $\lambda(\pi_{odd})$). כעת, נבחר $h<\min\limits_i|x_{i+1}-x_i|$ ונשים לב כי לכל $x\in[x_i,x_{i+1}]$ בקטע כלשהו של החלוקה π מתקיים ש x ו־ $x+h$ שייכים לקטע של החלוקה π_{even} אם i זוגי ולקטע של החלוקה π_{odd} אם i אי־זוגי. לכן $|f(x+h)-f(x)|$ קטן מהתנודה בקטע המתאים של אחת החלוקות $\pi_{even},\ \pi_{odd}$. כעת, נתבונן בסכום רימן של האינטגרל אותו אנו רוצים לחשב, ביחס לחלוקה π:

$$\begin{aligned}\sum_i\Delta x_i\left|f(t_i+h)-f(t_i)\right| &= \sum_{i\in\mathbb{N}_{even}}\Delta x_i\left|f(t_i+h)-f(t_i)\right|+\\ &+\sum_{i\in\mathbb{N}_{odd}}\Delta x_i\left|f(t_i+h)-f(t_i)\right|\leq\omega(\pi_{even},f)+\omega(\pi_{odd},f)<\\ &<\varepsilon\end{aligned}$$

כאשר $\vec{t}$ הן נקודות דגימה כלשהן של החלוקה. ע"פ הגדרה, קיבלנו את המבוקש.

3. ראשית, מתקיים $\int_a^b f(x)=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)$. כמו כן, נשתמש בהחלפת משתנים לינארית (זיכרו כי החלפה כזו מותרת, גם כאשר הפונקציה f היא אינטגרבילית אך לא רציפה). מתקיים

$$\int_a^c f(x)dx=[t=x-a]=\int_0^{b-a} f(a+t)=\int_0^{b-a} f(b-t)=[x=b-t,dt=-dx]=$$
$$=-\int_b^c f(x)=\int_c^b f(x)$$

כלומר $\int_c^b f(x)=\int_a^c f(x)dx$ ולכן, $\int_a^b f(x)=\int_a^c f(x)+\int_c^b f(x)=2\int_a^c f(x)dx$.

4. ראשית, כמו בשאלה הקודמה, הלחפת משתנים פשוטה (הזזה ב T) ושימוש בעובדה ש־ f מחזורית עם מחזור T נותנת שלכל קטע $[a,b]$ מתקיים $\int_a^b f=\int_{a+T}^{b+T} f$. בפרט מתקיימים השיוויונים :

$$I(0)=\int_0^T f=\int_0^{2T} f=...=\int_{nT}^{(n+1)T} f\ \ \forall n\in\mathbb{Z} \tag{1}$$

$$\int_{nT}^{a} f=\int_{(n+1)T}^{a+T} f\ \ \forall a\in\mathbb{R} \tag{2}$$

יהי $a\in\mathbb{R}$. יהי $n\in\mathbb{Z}$ השלם היחיד עבורו מתקיים $nT\le a\le (n+1)T$. ע"פ (1) ו־ (2) נקבל:

$$I(0)=\int_{nT}^{(n+1)T} f=\int_{nT}^{a} f+\int_a^{(n+1)T} f=\int_{(n+1)T}^{a+T} f+\int_a^{(n+1)T} f=\int_a^{a+T} f$$

כולמר $I(a)$ אינה תלויה ב a.

5. a.

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx=\begin{bmatrix} u=e^x-1\Rightarrow x=\ln(u+1) \\ x'=\frac{1}{u+1},\ u(0)=0,\ u(\ln 2)=1\end{bmatrix}=\int_0^1\sqrt{u}\frac{1}{u+1}du=$$
$$=\begin{bmatrix} u=v^2 \\ u'=2v\end{bmatrix}=\int_0^1\frac{v^2}{v^2+1}=2\int_0^1\frac{v^2+1-1}{v^2+1}=$$
$$=2\int_0^1+2\int_0^1\frac{-1}{v^2+1}=2-2\arctan(v)|_0^1=2-2\frac{\pi}{4}=2-\frac{\pi}{2}$$

.b

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-x^2)^3}dx = \left[\begin{array}{l} x=\sin t \\ x'=\cos t \end{array}\right] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}\cos t\cdot dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\cdot dt =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos t\cos^3 t\cdot dt = [u'=\cos t,\ v=\cos^3 t] =$$

$$= ... = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^2 t\cdot\cos^2 t\cdot dt = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t(1-\cos^2 t)\cdot dt =$$

$$= 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t\cdot dt - 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\cdot dt$$

מכאן נובע כי

$$4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\cdot dt = 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\left(\frac{2t+\sin(2t)}{4}\right)|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4 t\cdot dt = \frac{3\pi}{8}$$

.c

$$\int_0^2 |1-x|\cdot dx = \int_0^1 (1-x)\cdot dx + \int_1^2 (x-2)\cdot dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

.d

$$\int_0^6 [x]\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) = \int_0^1 0\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + \int_1^2 1\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) + ... + \int_5^6 5\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right) =$$

$$= -\frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)|_1^2 - \frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)|_2^3 - ... - \frac{6}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right)|_5^6 = \frac{30}{\pi}$$

.e

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} = \left[\begin{array}{ll} x=\frac{\pi}{2}-t, & t(0)=\pi/2 \\ x'=-1, & t(\frac{\pi}{2})=0 \end{array}\right] = -\int_{\pi/2} 0\frac{\sqrt{\cos t}}{\sqrt{\sin t}+\sqrt{\cos t}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$$

ולכן

$$2\int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} + \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} =$$

$$= \int_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}} = \int_0^{\pi/2} 1 = \frac{\pi}{2}$$

כלומר $\frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}$

6. a. נסמן את הקדומה של e^{t^2} ב $F(t)$. אזי,

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} e^{t^2}dt = \frac{d}{dx}\left[F(x^2)-F(0)\right] = F'(x^2)\cdot 2x = e^{x^4}\cdot 2x$$

b. שוב, נסמן ב $F(t)$ את הקדומה של $\arcsin(t)$. אז,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_{x-\sin x}^{\sin x} \arcsin(t)\cdot dt &= \frac{d}{dx}\left[F(\sin x)-F(x-\sin x)\right] = \\ &= F'(\sin x)\cos x - F'(x-\sin x)(1-\cos x) = \\ &= \arcsin(\sin x)\cos x - \arcsin(x-\sin x)(1-\cos x) = \\ &= x\cos x - \arcsin(x-\sin x)(1-\cos x)\end{aligned}$$

7. a. נתבונן בשיוויון הבא:

$$a_n = \frac{1}{n^5}\left(1^4+2^4+...+n^4\right) = \frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4+\left(\frac{2}{n}\right)^4+...+\left(\frac{n}{n}\right)^4\right).$$

נשים לב כי זהו סכום רימן של הפונקציה x^4 ב $[0,1]$ (ביחס לחלוקה לקטעים שווים באורך $\frac{1}{n}$ ונקודות הדגימה $\left(\frac{1}{n}\right),\left(\frac{2}{n}\right),...,\left(\frac{n}{n}\right)$). בגבול $n\to\infty$ פרמטר החלוקה $\frac{1}{n}$ שואף ל 0 וסכום זה מתכנס לאינטגרל $\int_0^1 x^4 = 1/5$. כלומר $\lim_{n\to\infty} a_n = 1/5$.

b. בדומה לסעיף הקודם

$$b_n = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} ie^{i^2/n^2} = \sum_{i=1}^{n} .\frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)e^{\left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

שוב, זהו סכום רימן של הפונקציה xe^{x^2} בקטע $[0,1]$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^1 xe^{x^2} = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

8. הפונקציה $\frac{1-\cos x}{x}$ רציפה וחסומה על $(0,\pi/4)$ (ודאו זאת), ולכן אינטגרבילית. כמו כן, היא חיובית בקטע זה ולכן הא"ש השמאלי מתקיים. נראה את האי־שיוויון הימני. לכל $x\in(0,\pi/4)$ נכתוב את $\cos x$ בפיתוח טיילור מסדר 2 עם שארית לגרנז':

$$cosx = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\sin(c_x)$$

כאשר $0 < c_x < x$. לכן
$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6}\sin(c_x) < \frac{x}{2}$$
כאשר האי־שיוויון נכון משום ש $\frac{x^2}{6}\sin(c_x) > 0$ (כי $\sin(c_x) > 0$ בתחום זה). מכאן נקבל כי:
$$\int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos x}{x} < \int_0^{\pi/4} \frac{x}{2} = \frac{\pi^2}{64}$$

9. נתבונן באינטגרל $\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1} \cdot dt$. היות והפונקציה $(b-t)^{n-1}$ היא אי־שלילית בקטע $[a,b]$, נובע ממשפט ערך הביניים האינטגרלי כי קיים $c \in [a,b]$ כך ש
$$\int_a^b f^{(n)}(t)(b-t)^{n-1} \cdot dt = f^{(n)}(c)\int_a^b (b-t)^{n-1} \cdot dt = \left[f^{(n)}(c)(-1)\frac{(b-t)^n}{n}\right]_a^b =$$
$$= \frac{1}{n}f^{(n)}(b-a)^n = \frac{(n-1)!}{n!}f^{(n)}(b-a)^n$$
הערה: למעשה, ניתן להוכיח כי במשפט ערך הביניים האינטגרלי ניתן לבחור $c \in (a,b)$ המקיימת את הנדרש. הוכיחו זאת!

10. ראשית, אם $f \equiv 0$ הטענה טריוויאלית. נניח $f \not\equiv 0$. נסמן $M = \sup_{[a,b]} |f'|$. אם f' אינה חסומה, הטענה טריוויאלית, לכן נניח כי $M < \infty$. נגדיר את הפונקציה הבאה על $[a,b]$:
$$g(x) = \min\{M(x-a),\ M(b-x)\} = \begin{cases} M(x-a), & a \le x \le \frac{a+b}{2} \\ M(b-x), & \frac{a+b}{2} \le x \le b \end{cases}$$
נראה שמתקיים $f(x) \le g(x)$ לכל $x \in [a,b]$ (מציור טענה זו ברורה): נניח בשלילה שיש נקודה $a < c \le \frac{a+b}{2}$ עבורה $f(c) > g(c)$. אזי ממשפט לגרנז' קיימות נקודות $a < c_1, c_2 < c$ כך ש
$$f'(c_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} = \frac{f(c)}{c-a} > \frac{g(c)}{c-a} = \frac{g(c)-g(a)}{c-a} = g'(c_2) = M$$
ומכאן $f'(c_1) > M$ בסתירה. באותו אופן מוכיחים את האי־שיוויון לתחום $\frac{a+b}{2} < x < b$. אם כך, מתקיים
$$\int_a^b f(x) \overset{(1)}{\le} \int_a^b g(x) = M\int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a) + M\int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) = \frac{(b-a)^2}{4}M.$$
היות ו־ f ו־ g רציפות, שיוויון יכול להתקיים ב (1) רק אם $f = g$ (כלומר לכל x ב $[a,b]$), ולכן ב (1) יש אי־שיוויון חזק. ע"פ הגדרת M קיימת נקודה $c \in (a,b)$ כך ש
$$\int_a^b f(x) < |f'(c)|\frac{(b-a)^2}{4}$$
כנדרש.

11. שאלה זו נפתרה בתרגול (שבוע 5)

חדו"א 2 - תרגיל מס' 4

1. (א) תהיינה f,g אינטגרביליות על $[a,b]$. הוכיחו את אי־שיוויון קושי־שוורץ:

$$\left(\int_a^b |f(x)g(x)|dx\right) \le \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b g(x)^2dx\right)^{1/2}$$

ע"פ ההדרכה הבאה: הגדירו $h(c)=\int_a^b (cf(x)+g(x))^2\,dx$ והמשיכו באנלוגיה להוכחת האי־שיוויון ב $\mathbb{R}^n$ שראינו בתרגול. בנוסף, עבור f ו־ g רציפות, הוכיחו כי מתקיים שיוויון אם ורק אם $f(x)=\alpha g(x)$ לכל $x\in[a,b]$ (כלומר f ו־ g פרופורציוניות).

(ב) עבור f אינטגרבילית ב $[a,b]$, נגדיר $||f|| := \left(\int_a^b f(x)^2dx\right)^{1/2}$. הוכיחו את אי־שיוויון המשולש: $||f+g|| \le ||f||+||g||$.

(ג) תהי g אינטגרבילית על $[a,b]$ ויהי $c>0$. מצאו f אינטגרבילית ב $[a,b]$ כך ש $\int_a^b fg$ מקסימילי תחת האילוץ $\int_a^b f^2=c^2$.

2. הוכיחו ש־ $\binom{n}{k}^{-1}=(n+1)\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ לכל $0\le k\le n$ שלמים.

3. מצאו את השגיאה בחישוב הבא: לכל פונקציה רציפה f,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx \overset{(t=\sin x)}{=} \int_0^0 f(\arcsin t)dt = 0$$

כאשר משתמשים בשינוי המשתנים $t=\sin x$, ואת גבולות האינטגרל מחשבים לפי $x=0\Rightarrow t=0, x=2\pi\Rightarrow t=0$.

4. האם האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים מתכנסים או מתבדרים?

$$\text{(a)}\int_0^\infty \frac{dx}{1+(x\sin 5x)^2}\ ;\quad \text{(b)}\int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2}\ ;\quad \text{(c)}\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+3x^6}dx\ ;$$

$$\text{(d)}\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}\ ;\quad \text{(e)}\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{1+5x^4}}\ ;\quad \text{(f)}\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{2x}\,dx\ ;$$

$$\text{(g)}\int_0^\infty \sin(5x^3)dx\ ;\ \text{(h)}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^p}\,dx,\quad p\in\mathbb{R}\ ;\quad \text{(i)}\int_0^\infty x\sin e^{2x}\,dx\ ;$$

$$\text{(j)}\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,dx\ ;\quad \text{(k)}\int_0^\infty \frac{\ln(1+x)}{x^p},\quad p>0\ .$$

5. הוכיחו ש־

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx,$$

אך אחד האינטגרלים מתכנס בהחלט, והשני רק בתנאי.

6. (א) מצאו דוגמא לפונקציה אי־שלילית ורציפה כך ש־ $\int_0^\infty f(x)dx$ סופי, אך לא קיים הגבול $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(ב) האם ייתכן ש־ $\int_0^\infty f(x)dx$ סופי, אך f לא חסומה?

7. תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה יורדת כך ש־ $\displaystyle\int_a^\infty f$ מתכנס.

(א) הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

(ב) הוכיחו שאפילו $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x)=0$. (רמז: הראו קודם ש־ $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} f(2^n)2^n<\infty$)

8. ★ תהי $f\to[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה וחסומה. הוכיחו ש־

$$\lim_{h\to\infty} h\int_0^\infty e^{-hx}f(x)\,dx=f(0).$$

תיקוני טעויות לפיתרון שלפניכם

שאלה 3, סעיף ג:

מתכנס; השוו עם $\frac{1}{x^{\alpha}}$ לאיזשהו $\alpha\in(0,1)$, ליד הנקודה אפס;*

זה עובד כי:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\frac{\ln x}{1-x^{2}}\right)}{1/x^{\alpha}}=0$$

* ליד 1, המצב יותר פשוט; לפונקציה יש גבול ולכן ניתן להשלים אותה לפונקציה רציפה ב- $[0,1]$.

זה עובד כי:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{1-x^{2}}\overset{\text{טיילור/לופיטל}}{=}-1.$$

שאלה 4:

יש טעות של מינוס עם סוף השורה השנייה, אבל הטעות היא רק בג'יפר השורה שמתחילים ממנה לכן זה לא משנה כלום.

חדו"א 2 - פתרונות לתרגיל 4

① נסמן $I_{k,n} = \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx$ ($0\le k\le n$ שלמים)

נמצא לאינטגרל נוסחה רקורסיבית ע"י אינטגרציה בחלקים:

$$I_{k,n} = \begin{bmatrix} u=(1-x)^{n-k} & dv = x^k dx \\ du=(n-k)(1-x)^{n-k-1}\cdot(-1)dx & v=\frac{x^{k+1}}{k+1}\end{bmatrix} =$$

$$= (1-x)^{n-k}\frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_0^1 - \int_0^1\left(-\frac{n-k}{k+1}\right)\cdot x^{k+1}\cdot(1-x)^{n-k-1}dx$$

$$= (0-0) + \frac{n-k}{k+1}\int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)}dx = \frac{n-k}{k+1}I_{k+1,n}.$$

נשים לב ש- $I_{n,n} = \int_0^1 x^n(1-x)^0dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

נשתמש בנוסחת הנסיגה שמצאנו כדי לבטא את $I_{k,n}$ בעזרת $I_{n,n}$:

$$I_{k,n} = \frac{n-k}{k+1}I_{k+1,n} = \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{n-(k+1)}{k+2}I_{k+2,n} = \dots$$

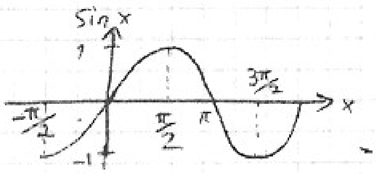
$$\dots = \frac{(n-k)(n-(k+1))\cdot\ldots\cdot(n-(n-1))}{(k+1)\cdot(k+2)\cdot\ldots\cdot(n)}\cdot I_{n,n} =$$

$$= \frac{(n-k)!}{(k+1)(k+2)\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{k!}{k!}I_{n,n} = \frac{(n-k)!\,k!}{n!}I_{n,n}$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}}I_{n,n} = \frac{1}{\binom{n}{k}}\cdot\frac{1}{n+1}$$

ולכן: $\boxed{(n+1)I_{k,n} = \binom{n}{k}^{-1}}$

② שימו לב כי $\arcsin(x)$ מחזירה זווית בטווח $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



לכן ההצבה $t=\sin x$ אינה גוררת $x=\arcsin(t)$ כאשר x מחוץ לטווח הזה.

כדי לחשב את האינטגרל עם הצבה זו צריך לפרק לקטעים (ראו ציור של sin)

מהצבה $t = \sin x$

$$\left.\begin{array}{lll}
x \in [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & x = \arcsin t \\
x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] & \longrightarrow & x = \pi - \arcsin t \\
x \in [\pi, \frac{3\pi}{2}] & \longrightarrow & x = \pi - \arcsin t \\
x \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] & \longrightarrow & x = \arcsin t + 2\pi
\end{array}\right\} (*)$$

לכן האינטגרציה נראית כך

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \left[\begin{array}{ll} t = \sin x & dt = \cos x\,dx \\ x = \text{לפרק לפי } (*) & \end{array}\right]$$

$$= \int_0^{\pi/2} f(x)\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} f(x)\cos x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx =$$

הצבת נפרד

$$= \int_0^1 f(\arcsin t)\cdot dt + \int_1^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(\arcsin t + 2\pi)\,dt$$

③ (a) מתבדר,

$\sin 5x = 0 \iff x = x_k = \frac{\pi k}{5}$ עבור k טבעי.

לכל x_k כגד (נמצא) y_k קרוב אליו כך שבקטע $[x_k, y_k]$,

$$\frac{1}{1+(x\sin 5x)^2} = f(x) > \frac{1}{2}$$

כלומר צריך ש- $(x\sin 5x)^2 < 1 \quad \forall x \in [x_k, y_k]$

זה מתקיים אם נקח $|y_k - x_k| \le \frac{1}{5(x_k+1)}$

(הסבר $\left((x\sin 5x)^2 \le y_k^2 \sin^2 5y_k < y_k^2 \cdot (5(y_k - x_k))^2 < 1\right)$

אז
$$\int_0^\infty f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^\infty \min_{[x_k,y_k]} f \cdot |y_k - x_k|$$

סוכם רק על $[x_k, y_k]$, (דרכו תחתון) בשאר המקומות $f(x) \ge 0$

$$\ge \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5(x_k+1)} = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\frac{\pi k}{5}+1} = \infty$$

(b) הנקודות הבעיתיות הן $0, 1, \infty$. אז:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x(\ln x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{\ln^2 x} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1/x^2}{2\ln x \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{\ln x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-1/x^2}{1/x} = \infty$$

וקל לראות שגם ליד $x=1$ הפונ' לא חסומה.

נפרק $\int_0^\infty = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 + \int_1^2 + \int_2^\infty$. הטפול בכולם דומה.

למשל נקח $\int_1^2$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx = \begin{bmatrix} t = \ln x & x=1 \to t=0 \\ dt = \frac{1}{x}dx & x=2 \to t = \ln 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \frac{1}{t^2}\,dt \to \text{מתבדר}$$

לכן האינטגרל כולו מתבדר.

(c) מתכנס; החלפת משתנים $t = x^3$.

(d) מתבדר, $x=0$ לא בעייתי, ליד $x=1$ נשווה עם $\frac{1}{x-1}$

(e) מתכנס; השוואה עם $\sqrt{\frac{x}{x^4}} = \frac{1}{x^{3/2}}$.

(f) מתבדר; $\frac{|\sin x|}{2x} \geq \frac{\sin^2 x}{2x} = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right) \geq 0$$

$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה

$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ מתבדר; לכן מסה"כ האינטגרל שלנו גדול מאינטגרל מתבדר:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{2x}dx \geq \frac{1}{4}\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x}dx}_{=\infty} - \frac{1}{4}\underbrace{\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx}_{=c<\infty} = \infty$$

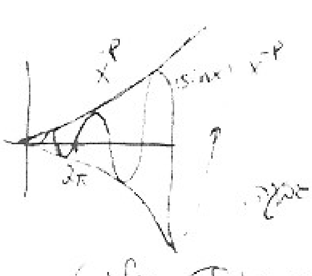
(g) מתכנס; $\int_0^\infty \sin(5x^3)dx = [t=5x^3] = \int_0^\infty \frac{1}{15}\frac{\sin t}{t^{2/3}}dt$

כי מתכנס לפי מבחן דיריכלה: $\frac{1}{t^{2/3}}$ מונוטונית יורדת ל-0

ו- $\sin t$ בעלת פונקציה קדומה חסומה!

(h) לנו בעייתיות $0,\infty$. נכתוב $\int_1^\infty + \int_0^1$

אם $0<p$, אז $\int_1^\infty x^{-p}\sin x\,dx$ מתבדר



הסבר: עדיף ש $\int_{2\pi}^\infty$ מתבדר במקרה כזה.

נגדיר $(n\geq 2)$, $I(n) = \int_{n\pi}^{(1+n)\pi} x^{-p}\sin x\,dx$ שטח אחד.

נשים לב כי $|I(n+1)|>|I(n)|$ (כי השטחים בערך מוחלט עולים)

האינטגרל כולו הוא $\int_{2\pi}^\infty = \int_{2\pi}^{3\pi} + \int_{3\pi}^{4\pi} + \dots = \sum_{n=2}^\infty I(n)$

נשים לב כי $I(2k)>0$, $I(2k+1)<0$ לכל $k\geq 1$ טבעי

$$S_{2k+1} = (\underbrace{I(2)+\overset{<0}{I(3)}}_{<0}) + (\underbrace{I(4)+I(5)}_{<0}) + \dots + (\underbrace{I(2k)+I(2k+1)}_{<0})$$ אז

$$S_{2k} = I(2) + (\underbrace{I(3)+\overset{>0}{I(4)}}_{>0}) + (\underbrace{I(5)+I(6)}_{>0}) + \dots + (\underbrace{I(2k-1)+I(2k)}_{>0})$$

לכן $\begin{cases} S_{2k+1} < 0 \\ S_{2k} \geq I(2) > 0 \end{cases}$ לכל $k \geq 1$ טבעי

כלומר לא קיים $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (גבול זה צריך להיות קטן מ-0 וגדול מ- $I(2)>0$, סתירה).

אם $p>0$ אז $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^p}dx$ מתכנס (מבחן דיריכלה)

כעת נעשה החלפת משתנים עבור $\int_0^1$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}dx = [t=1/x] = \int_1^\infty \frac{\sin 1/t}{t^{2-p}}dt$$

כפי שראינו, זה מתכנס $\Leftrightarrow 0<2-p$ (מה שהוכחנו בתחילת התרגיל).

לכן $\int_0^1, \int_1^\infty$ מתכנסים $\Leftrightarrow$ $0<p$ וגם $0<2-p$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{0<p<2}$.

(i) מתכנס;

$$\int_0^\infty x\sin(e^{2x})dx = [t=e^{2x}] = \int_1^\infty \frac{1}{4}\underbrace{\frac{\ln t}{t}}_{\text{מונוטונית יורדת ל-0}}\underbrace{\sin t}_{\text{בעלת קדומה חסומה}}dt$$

האינטגרל מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

(j) מתבדר; ליד 0 להשוות עם $\frac{1}{x}$

ליד 1 להשוות עם $\frac{1}{1-x}$.

(k) מתכנס עבור $1<p<2$.

<u>הסבר</u>: יש שתי נקודות בעייתיות - $0,\infty$.

$$\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$$ נפרק

עבור $\int_0^1$, נשווה עם $\frac{1}{x^{p-1}}$ ונקבל בגבול (כש-$x \to 0$) את המנה 1.
לכן ממבחן זה האינטגרל מתכנס אמ"מ $p-1<1 \longleftrightarrow \underline{p<2}$.

עבור $\int_1^\infty$, נשווה עם $\frac{1}{x^{p-\alpha}}$ ונקבל בגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases}\infty, & \alpha\le 0\\ 0, & \alpha>0\end{cases}$

כאשר $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x^p}$, $g(x)=\frac{1}{x^{p-\alpha}}$.

אם $0<\alpha$, התכנסות $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{p-\alpha}}$ גוררת התכנסות האינטגרל שלנו, $\int_1^\infty f(x)dx$, כלומר אם $1<p-\alpha$, או $p>\alpha+1>1$ יש התכנסות.

אם $0\ge\alpha$, התבדרות $\int_1^\infty \frac{dx}{x^{p-\alpha}}$ גוררת התבדרות $\int_1^\infty f(x)dx$, כלומר אם $p-\alpha\le 1$ או $p\le 1+\alpha\le 1$ יש התבדרות.

לכן $\int_1^\infty f(x)dx$ מתכנס $\iff \underline{p>1}$.
בסה"כ, צריך $1<p<2$.

(4) בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}\,dx = \begin{bmatrix} u=\frac{1}{1+x} & v'=\cos x \\ u'=-\frac{1}{(1+x)^2} & v=\sin x\end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\cancel{\left.-\frac{\sin x}{1+x}\right|_0^\infty}}_{0} + \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx = \int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$$

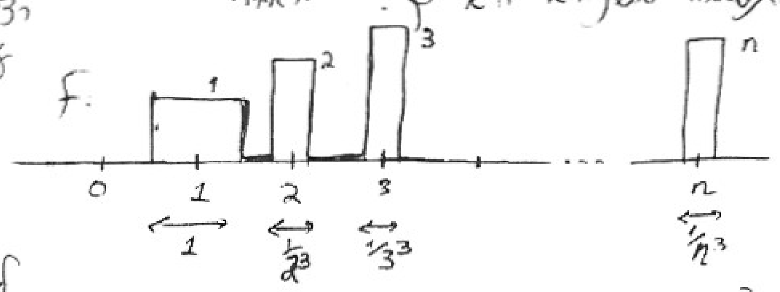
בדומה לסעיף (f) של תרגיל קודם (דף זה), מראים ש- $\int_0^\infty \left|\frac{\cos x}{1+x}\right|dx$ מתבדר. האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x}dx$ מתכנס לפי דיריכלה, לכן מתכנס בתנאי.

$\int_0^\infty \frac{\sin x}{(1+x)^2}dx$ לעומתו מתכנס בהחלט, כי: $0\le\left|\frac{\sin x}{(1+x)^2}\right|\le\frac{1}{(1+x)^2}$ ואילו $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2}$ מתכנס.

(5)(א)(4+ה) : התשובה השניה היא כן. לדוגמה:

הערה: כאן f אינה רציפה אך ניתן לתקן ע"י החלפת כל מלבן במשולש:

למשולש יש חצי משטח של המלבן, לכן כל הסכומים מוכפלים ב- $\frac{1}{2}$



מדרגה חלקית של f

$$f(x)=\begin{cases} n, & |x-n|<\frac{1}{2n^3} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז $f\geq 0$ רציפה,

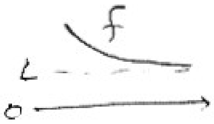
$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}\cdot n = \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$ - מתכנס.

אבל f לא חסומה, וגם לא קיים $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(6)(א) $f^{(k)}$ הפונקציה יורדת. אם f אינה חסומה מלמטה, אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ ואז בודאי $\int_a^\infty f(x)\,dx$ מתבדר.

אם f חסומה מלמטה, אז $\exists \lim_{x\to\infty} f(x)=L$, L סופי.

אם $L\neq 0$, נניח בלי הגבלה כי $L>0$ ($L<0$ דומה).



אז $f(x)\geq L$ לכל $a\leq x<\infty$, ולכן

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \geq \int_a^\infty L\,dx = \infty$$

לכן הכרח $L=0$.

(ב) $\int_0^\infty f(x)\,dx$ מתכנס $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty f(n)<\infty$ (כי f מונוטונית יורדת ל-0!) מבחן...

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty f(2^n)\cdot 2^n<\infty$ (קריטריון להתכנסות טורים)

כעת לכל x גדול, $2^n \le x < 2^{n+1}$ ל-n מסוים

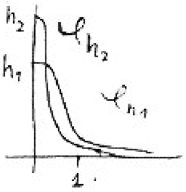
ואז $0 \le xf(x) < 2^{n+1} f(2^n)$

$$\lim_{x\to\infty} xf(x) \le 2\lim_{n\to\infty} 2^n f(2^n) = 0.$$

---

7. נסמן $\varphi_h(x) = he^{-hx}$, ונשים לב לתכונות הבאות:

- לכל $x \neq 0$, $\lim_{h\to\infty}\varphi_h(x) = 0$. אבל זה הוא במידה שווה בקטע מהצורה $[a,\infty)$, $a>0$ (כי φ_h מונוטונית יורדת).
- ל-$x=0$, $\lim_{h\to\infty}\varphi_h(0) = \infty$.
- לכל h, $\int_0^\infty \varphi_h(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$.



מהנתון $\exists A, |f| \le A$.

יהי $\delta > 0$. נבחר h גדול מספיק כך ש- $\int_\delta^\infty \varphi_h(x)\,dx < \frac{\delta}{A}$.

(זה אפשרי, כי $\int_\delta^\infty \varphi_h(x)\,dx = \int_{\delta h}^\infty e^{-t}\,dt = e^{-h\delta} \xrightarrow[h\to\infty]{} 0$)

כעת נפרק $\int_0^\infty f\cdot\varphi_h = \int_0^\delta + \int_\delta^\infty$.

$$\left|\int_\delta^\infty \varphi_h\cdot f\right| \le \int_\delta^\infty \varphi_h\cdot|f| \le A\cdot\int_\delta^\infty \varphi_h < A\cdot\frac{\delta}{A} = \delta$$

עבור $\int_0^\delta$, קיים c כך ש- $c\in[0,\delta]$ $\int_0^\delta \varphi_h f = f(c)\cdot\int_0^\delta \varphi_h$

אך $\int_0^\delta \varphi_h + \underbrace{\int_\delta^\infty \varphi_h}_{<\delta/A} = \int_0^\infty \varphi_h = 1 \Rightarrow 1 \ge \int_0^\delta \varphi_h > 1 - \frac{\delta}{A}$

לכן $1\cdot f(c) \ge \int_0^\delta \varphi_h f = f(c)\int_0^\delta \varphi_h \ge \left(1-\frac{\delta}{A}\right) f(c)$

כאשר $\delta \to 0$, $c \to 0$: $1\cdot f(c) \to f(0)$, $\left(1-\frac{\delta}{A}\right) f(c) \to 1\cdot f(0)$

נבחר מראש δ קטן מספיק כך שאם $|c| < \delta \Rightarrow |f(c)-f(0)| < \varepsilon$

ל-ε נתון נקטין את δ אם צריך כדי ש- $\delta < \varepsilon$.

$$f(0)+\varepsilon \ge \int_0^\delta \varphi_h f \ge \left(1-\frac{\varepsilon}{A}\right)(f(0)-\varepsilon)$$

בסה"כ,

$$f(0)+2\varepsilon \geq \int_0^\infty \varphi_h \cdot f = \int_0^\delta \varphi_h f + \underbrace{\int_\delta^\infty \varphi_h \cdot f}_{\in[-\varepsilon,\varepsilon]} \geq \left(1-\frac{\varepsilon}{A}\right)\cdot\left(f(0)-\varepsilon\right)-\varepsilon$$

וכש- $\varepsilon\to 0$, שני החסמים שואפים ל- $f(0)$.

---

(8) (ג) נגדיר כזאת $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $h(c)=\int_a^b [f(x)+c\cdot g(x)]^2\,dx$. ברור כי $h\geq 0$.

אבל:

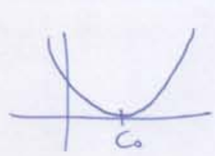
$$h(c)=\int_a^b\left[f^2(x)+2cf(x)g(x)+c^2g^2(x)\right]dx \overset{\text{כל אחד אינטגרבילי.}}{=} \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\cdot 1 + \left(2\int_a^b f(x)g(x)dx\right)\cdot c + \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)\cdot c^2$$

$\Leftarrow$ כלומר ש- $h(c)$ היא פרבולה (אי-שלילית לכל $c\in\mathbb{R}$). זה אומר שהדסקרמיננטה לא חיובית;

$$4\left(\int fg\right)^2-4\cdot\left(\int g^2\right)\cdot\left(\int f^2\right)\leq 0$$

או כשוט $\left(\int fg\right)^2 \leq \left(\int g^2\right)\cdot\left(\int f^2\right)$, כנדרש.

⊛ כעת נטפל במקרה השוויון; נניח ש-f ו-g רציפות, ושמתקיים שוויון באי"ש קושי-שוורץ. זה אומר שהדסקרמיננטה של הפונקציה (הריבועית) h מתאפסת, ולכן ל-h יש גרף כזה:



כלומר; $h(a)=0$, לפי הגדרה: $h(c_0)=\int_a^b [f(x)+c_0\cdot g(x)]^2\cdot dx=0$.

הפונקציה $(f+c_0\cdot g)^2$ היא אי-שלילית, רציפה, ולכן הדרך היחידה שהאינטגרל הזה יתאפס היא שהאינטגרנד יהיה קבוע של אפס (ראינו בתרגול).

כלומר: $f(x) = -c_0\cdot g(x)$. $\forall x\in[a,b]$. ▨

(ב) שני הביטויים $\|f+g\|$, $(\|f\|+\|g\|)$, חיוביים, לכן נוכיח את אי"ש הבא:

$$\|f+g\|^2 \le (\|f\|+\|g\|)^2 = \|f\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2$$

באגף שמאל נקבל, לפי הגדרה;

$$\|f+g\|^2 = \int_a^b (f+g)^2_{(x)}\cdot dx = \int_a^b f^2 + 2\int_a^b fg + \int_a^b g^2 =$$

$$= \|f\|^2 + 2\int_a^b f\cdot g + \|g\|^2$$

לכן לאחר חיסור $\|f\|^2+\|g\|^2$ משני האגפים, מ"ש שצריך להוכיח הוא:

$$2\cdot\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le 2\left(\int_a^b f^2_{(x)}dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b g^2_{(x)}dx\right)^{1/2}$$, שזה בדיוק

אי"ש קו"ש מסעיף א.

(ג) חסם אפשרי אחד ניתן מיידית מא"ש ק"ש שבסעיף (א);
(תז': $f:[a,b]\to\mathbb{R}$)

$$\int_a^b f\cdot g \le \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b g^2\right)^{1/2} = c\cdot\|g\|$$

השאלה היא האם זהו חסם הדוק? מסעיף א, אנחנו יודעים שא"ש קושי-שוורץ הוא הדוק (כלומר, כשרשום "$\le$" אין "מתקיים" "$<$" אלא "="), כאשר הפונקציות פרופורציוניות. לכן יש לבחור f שהיא כפולה של g, ומקיימת את התנאי $\|f\|=c$; ננסה:

$$f_0(x) = \frac{c}{\|g\|}\cdot g(x) \longrightarrow$$

(המוטיבציה לבחירה זו היא העובדה שהגודל $\|h\|$ הוא הנורמה; ל-$\frac{g}{\|g\|}$ תהיה "נורמה" $=1$, ואחרי כפל ב-c....)

$$\|f_0\|^2 = \int_a^b f_0^2(x)\,dx = \frac{c^2}{\|g\|^2}\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx = \frac{c^2}{\|g\|^2}\cdot\|g\|^2 = c^2 \longrightarrow$$ כנדרש.

ועם זאת:

$$\int_a^b f_0\cdot g = \int_a^b \frac{c}{\|g\|}\cdot g^2(x) = \frac{c}{\|g\|}\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx = \frac{c}{\|g\|}\cdot\|g\|^2 = c\cdot\|g\|$$

כלומר; ראינו שלכל $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, עם $\|f\|=c$, מתקיים:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \le c\cdot\|g\| = \int_a^b f_0(x)g(x)\,dx$$

כלומר; f_0 ממקסמת גודל זה תחת האילוץ לנורמה $=c$.

(הערה; $\|f\|$ נקראת לעתים נורמה של f.)

חדו"א 2 - תרגיל מס' 5

1. הוכיחו את אי־שיוויון ינסן: לכל פונקציה קמורה וגזירה f, ולכל פונקציה רציפה g,

$$f\left(\int_0^1 g(x)dx\right) \leq \int_0^1 f(g(x))dx$$

(רמז: נסמן $c = \int_0^1 g(x)dx$. אזי $f(t) \geq f(c) + f'(c)(t-c)$.)

2. תהי $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה וחיובית.

(א) נניח ש־ $\lim\limits_{x\to\infty} (\log f)'(x)$ קיים ושלילי. הוכיחו ש־ $\int_0^\infty f$ מתכנס.

(ב) נניח ש־ $\int_0^\infty f$ מתכנס וש־ f' חסומה. הוכיחו ש־ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$.

3. תזכורת מחדו"א 1: חקרו את התכנסות הטורים הבאים:

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^\infty \left[1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]\log n\ ; \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^\infty \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{a}{n}\right]\ ;$$

$$\text{(c)} \sum_{n=1}^\infty \int_0^{1/n} \frac{x\sin x dx}{x^3+1}\ ; \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^\infty a^{h_n}, \quad h_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n};$$

$$\text{(e)} \sum_{n=1}^\infty (-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\ ; \quad \text{(f)} \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(\log n)^{\log n}}\ ; \quad \text{(g)} \sum_{n=10}^\infty \frac{1}{(\log n)^{\log\log n}}$$

4. תהי $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ סדרת מספרים. אומרים שהמכפלה האינסופית $\prod_{n=1}^\infty a_n$ מתכנסת, אם קיים $P \neq 0$ כך שסדרת המכפלות החלקיות $P_n := \prod_{k=1}^n a_k$ מתכנסת ל־ P. אם $P_n \to 0$ אומרים שהמכפלה מתבדרת לאפס. הוכיחו:

(א) אם המכפלה $\prod_{n=1}^\infty a_n$ מתכנסת, אז $a_n \to 1$.

(ב) אם $a_n > 0$ לכל n, אז $\prod_{n=1}^\infty a_n$ מתכנסת או"א הטור $\sum\limits_{n=1}^\infty \ln a_n$ מתכנס.

(ג) אם $a_n = 1 + c_n \geq 1$, אזי $\prod_{n=1}^\infty a_n$ מתכנסת או"א הטור $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n$ מתכנס.

5. (א) הוכיחו כי אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ בעלת השתנות חסומה, אז f חסומה.

(ב) לאילו ערכי $p \in \mathbb{R}$, הפונקציה

$$f_p(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^p\cos(\frac{\pi}{x}), & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

היא בעלת השתנות חסומה ב־ $[0,1]$?

6. נניח ש $x(t), y(t)$ גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$ וכמו כן $y=f(x)$ גזירה ברציפות (ומתקיים $y(t)=f(x(t))$ לכל $t\in[a,b]$). הוכיחו כי העקומה $L(x(t),y(t),[a,b])$ היא בעלת אורך

$$l=\int_{x(a)}^{x(b)}\sqrt{1+f'(x)}dx$$

7. חשבו את אורך המסילות הבאות:

(א) $\gamma(t)=(t,\ln(\cos t))$, $\gamma:[0,\frac{\pi}{6}]\to\mathbb{R}^2$

(ב) $\gamma(t)=((1+\cos t)\cos t,(1+\cos t)\sin t)$, $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$.

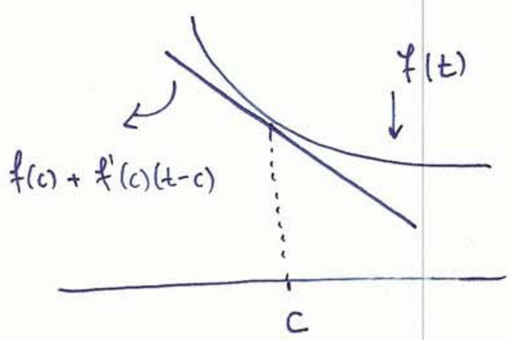
(ג) $\gamma(t)=\left(e^{\sqrt{t+5}},e^{\sqrt{t+5}}\right)$, $\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2$.

8. תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ עקומה גזירה ברציפות.

(א) הוכיחו שאורך העקומה הוא לפחות $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$ כאשר $\gamma(a)=(x_1,y_1),\gamma(b)=(x_2,y_2)$.

(ב) אורך העקומה לא תלוי בפרמטריזציה: תהי $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציה עולה וגזירה ברציפות. נסמן $\tilde{\gamma}(s)=\gamma(\varphi(s))$. הוכיחו שאורך $\tilde{\gamma}$ שווה לאורך γ.

① נגדיר $c := \int_0^1 g(x)dx$



ע"פ קמירות מתקיים; $f(t) \ge f(c) + f'(c)(t-c)$

לכל t ובפרט עבור $t = g(x)$

כלומר;

$$f(g(x)) \ge f(c) + f'(c)(g(x)-c)$$

אינטגרציה של האי-שוויון נותן:

$$\int_0^1 f(g(x)) \ge \overbrace{\int_0^1 f(c)}^{= f(c)} + f'(c)\cancelto{0}{\left(\int_0^1 g(x) - c\right)}$$

לכן $\int_0^1 f(g(x)) \ge f\left(\int_0^1 g(x)\right)$. ☒

② ע"פ הנתון (1c): $\lim_{x\to\infty}(\log f)'(x) = -M < 0$ ולכן החל ממקום מסוים, R_0,

מתקיים $(\log f)'(x) < -M_0$, עבור $-M_0 = -M + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ כלשהו).

כעת;

$\forall x \ge R_0 \quad (\log f)'(x) < -M_0$

$\Leftarrow$ (מונו' האינטגרל) $(\log f)(x) \le (\log f)(R_0) - M_0 x$

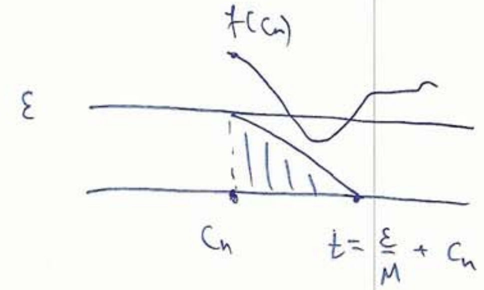
$\Leftarrow$ $0 < f(x) \le f(R_0)e^{-M_0 x}$ $\Leftarrow$ $\int_{R_0}^{\infty} f$ מתכנס

(היות ו- $\int_{R_0}^{\infty} e^{-M_0 x}$ מתכנס) מהשוואת אינט' של

פונ' חיוביות. ☒

ⓑ נניח בשלילה ש $f(x) \underset{x\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$. אזי קיימת סדרה $c_n \uparrow \infty$

ו- $0 < \varepsilon$ כך ש $f(c_n) \ge \varepsilon$ לכל n.



היות ו- $-M \le f' \le M$

נקבל כי $f(t)$ תהיה אי-שלילית בין c_n לבין $c_n + \frac{\varepsilon}{M}$ (כפי שמתואר בציור)

(במקרה הגרוע בו $f' = -M$ בתחום $[c_n, \frac{\varepsilon}{M}+c_n]$). לכן

$$\int_{c_n}^{\infty} f \ge \int_{c_n}^{c_n+\varepsilon/M} f \ge \underbrace{\frac{\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon}{M}}{2}}_{\text{שטח המשולש}}$$

וזאת בסתירה לכך ש $\int_R^\infty f \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (היות ו $\int_0^\infty f$ מתכנס). ☒

③

ⓐ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \log n$

זה טור חיובי. נשווה עם הטור המתכנס $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{3/2}}$;

$$\underbrace{\frac{\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)}{\frac{1}{n^2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\log n}{\sqrt{n}}}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$ הטור מתכנס.

(b) $\sum_{1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{a}{n}\right]$

נבדוק את סימן המחוברים;

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{a}{n}=\frac{1}{n}\left(\frac{\sin(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}-a\right)$$

$$\downarrow$$
$$1$$

לכן אם

$\underline{a>1}$: $\sin(\frac{1}{n})-\frac{a}{n}<0$ החל ממקום מסוים.

$\underline{a<1}$: $\sin(\frac{1}{n})-\frac{a}{n}>0$ " " " .

$\underline{a=1}$: $\sin(\frac{1}{n})-\frac{1}{n}<0$ כי $\sin x<x$ לכל $0<x$.

בסה"כ המ"מ זהו טור עם מקדמים מסימן קבוע. במקרים $a\neq 1$ נשווה עם הטור המתבדר $\sum\frac{1}{n}$; $\dfrac{\sin(\frac{1}{n})-\frac{a}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1-a\neq 0$

ונקבל שהטור מתבדר.

במקרה $a=1$; מטיילור $\sin x=x+o(x^2)$, $x\to 0$ ולכן $\dfrac{\sin(\frac{1}{n})-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\to 0$

והטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס. לכן גם הטור המקורי. ☒

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{x\sin x}{x^3+1}$

זהו טור חיובי (כי הפונ' חיובית בתחום הנתון).

וגם $\dfrac{x\sin(x)}{x^3+1}\leq x$ לכל $x\in[0,1]$ ולכן

$$\int_0^{1/n}\frac{x\sin(x)}{x^3+1}\leq\int_0^{1/n}x=\frac{1}{2n^2}$$

ולכן $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס $\Leftarrow$ הטור המקורי מתכנס. ☒

(ⓓ) $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $h_n \nearrow +\infty$

אם $a \geq 1$: המחובר הכללי $a^{h_n} \not\to 0$ והטור מתבדר.

אם $0 \leq a < 1$; $a^{h_n} \downarrow 0$ ואפשר להשתמש במבחן העיבוי

של קושי; $\sum_{1}^{\infty} a^{h_n} \sim \sum_{1}^{\infty} 2^n a^{h_{2^n}}$.

נשתמש במבחן השורש של קושי;

$$\sqrt[n]{2^n a^{h_{2^n}}} = 2 a^{\frac{h_{2^n}}{n}} \longrightarrow 2 a^{\ln 2}$$

$\frac{h_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$ היות ו-

$a < \frac{1}{e} \iff < 1$; $= 1 \iff a = \frac{1}{e}$; $> 1 \iff \frac{1}{e} < a < 1$

לכן עבור $0 \leq a < \frac{1}{e}$ הטור שלנו מתכנס, עבור $\frac{1}{e} < a$

מתבדר. נשאר לבדוק $a = \frac{1}{e}$. במקרה הזה;

$$2^n a^{h_{2^n}} = \frac{2^n}{e^{h_{2^n} - \ln(2)n + \ln(2)n}} = \frac{1}{e^{h_{2^n} - \ln(2^n)}} \longrightarrow \frac{1}{e^{\gamma}} \neq 0$$

כאשר $\gamma = \lim_{n \to \infty} (h_n - \ln(n))$ קבוע אוילר. כלומר האיבר הכללי

$\not\to 0$ ולכן הטור מתבדר. מכאן נובע שגם הטור שלנו אינו מתכנס. ⊠

(e)

ראשית נראה שמספיק לחקור את $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n}$.

הוכחה: לפי פיתוח טיילור $\sin(x) = x + \alpha(x)$ כאשר $\alpha(x) = o(x^2)$,

לכן

$$\sum_{1}^{M} (-1)^{[\sqrt{n}]} \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \sum_{1}^{M} (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n} + \underbrace{\sum_{1}^{M} (-1)^{[\sqrt{n}]} \alpha\left(\frac{1}{n}\right)}$$

מתכנס בהחלט

ע״י השוואה עם $\sum \frac{1}{n^2}$.

$\Leftarrow$ $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \sum (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n}$.

כעת, הטור הוא מהצורה: $\left(-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) -$

ראינו בכיתה שאפשר/מספיק לחקור את הטור עם הסוגריים על סכום איברים שווי סימן, כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n A_n$ כאשר

$A_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{8}$, $A_3 = \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}$, ...

ובאופן כללי: $A_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{1}{k} =$

$$= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^2+k}$$

$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{n^2}$

כעת נשים לב ש $A_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^2+k} \le \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$

ונבדוק את ההפרש $A_n - \frac{2}{n}$;

$$\left|A_n - \frac{2}{n}\right| = \left|\sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{1}{n^2+k} - \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{k}{(n^2+k)n^2} \le$$

$$\le \frac{1}{n^2} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{2n}{(n^2+0)n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{(2n)^2}{n^4} = \frac{5}{n^2}$$

כלומר הראינו ש:
$$A_n = \frac{2}{n} + R_n$$

כאשר $|R_n| \le \frac{5}{n^2}$. כעת;

$$\sum_{n=1}^{M} (-1)^n A_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{M} (-1)^n \frac{2}{n}}_{\text{מתכנס לפי לייבניץ}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{M} (-1)^n R_n}_{\text{מתכנס בהחלט ע"י השוואה עם } \sum \frac{5}{n^2}}$$

ולכן $\sum (-1)^n A_n$ מתכנס ולכן $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n}$ מתכנס

ולכן $\sum (-1)^{[\sqrt{n}]} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ מתכנס.

(כמו כן - שימו לב שהטור איננו מתכנס בהחלט) $\boxtimes$

(ד) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 n}}$

נשתמש במבחן העיבוי של קושי;

$$\sum \frac{1}{(\log_2 2^n)^{\log_2 2^n}} \sim \underbrace{\sum 2^n \frac{1}{n^n}}$$

מתכנס לפי השורש של קושי; $\sqrt[n]{2^n \frac{1}{n^n}} = 2 \cdot \frac{1}{n} \to 0$.

ולכן הטור המקורי מתכנס. $\boxtimes$

(9)

גם כאן $\log = \log_2$ (זה לא משנה דבר)

נשתמש במבחן העיבוי ;

$$\sum \frac{1}{(\log_2 n)^{\log_2 \log_2 n}} \sim \sum 2^n \frac{1}{n^{\log_2(\log_2(2^n))}} =$$

$$= \sum 2^n \frac{1}{n^{\log_2 n}} = \sum 2^n \frac{1}{2^{(\log n)^2}} = \sum 2^{n-\log^2 n}$$

אבל $n - \log^2 n \to +\infty$ ולכן האיבר הכללי לא שואף ל- 0.

לכן הטור מתבדר ומכאן שגם הטור המקורי מתבדר. ■

(4) (10) (א) $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \longrightarrow \frac{P}{P} = 1$

(ב) $\ln(P_n) = \ln\left(\prod^n a_k\right) = \sum^n \ln(a_k) = S_n$

$\Leftarrow$ $P_n = e^{S_n}$. לכן אם $P_n \to P > 0$

וודאי $e^{S_n} \to e^S$ אמ"מ $S_n \to \ln(P)$ (מרציפות $\ln$).

(ג) במקרה זה ; $0 \le \ln(a_n) \le c_n$ $\circledast$

$\circledast\circledast$ $\ln(a_n) \ge c_n - \frac{1}{2}c_n^2$

לכן:

אם $\sum c_n$ מתכנס אז $\sum \ln(a_n)$ מתכנס $\Leftarrow$ $\prod a_n$ מתכנס.

אם $\sum \ln(a_n)$ מתכנס אז $1+c_n = e^{\ln(a_n)} \xrightarrow[a_n \to 1]{} 1$

$\Rightarrow c_n \to 0$

לכן $\ln(a_n) \geq \frac{1}{c_n} - \frac{1}{2}c_n^2 \geq \frac{1}{2}c_n \geq 0$

החל ממקום מסוים

$\Leftarrow$ $\sum \frac{1}{2}c_n$ מתכנס (השוואה עם $\sum \ln(a_n)$) ולכן $\sum c_n$ מתכנס.

הנפרדות ⊛, ⊛⊛; לפי פיתוח טיילור עם שארית לגרנז':

$$\ln(1+c) = c - \frac{1}{2(1+d)^2}c^2 \quad \begin{cases} \leq c \\ \geq c - \frac{1}{2}c^2 \end{cases}$$

$$0 < d < c$$

☒

5) (א) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ בעלת השתנות חסומה, ונניח שההשתנות היא $V\in\mathbb{R}$. לכל שתי נקודות x,y, מתקיים $|f(x)-f(y)|\le V$. לכן לכל $x\in[a,b]$;

$$|f(x)| \le |f(a)| + |f(x)-f(a)| \le V+|f(a)| \equiv M$$

כלומר, f חסומה.

(ב) $\underline{f_p:[0,1]\to\mathbb{R}}$; $f_p(x) = \begin{cases} 0 & : x=0 \\ x^p\cdot\cos(\frac{\pi}{x}) ; & x\neq 0\end{cases}$.

(*) נשים לב שעבור $\boxed{p<0}$, f_p לא חסומה, ולכן אין לה השתנות חסומה (מ-(א)).

(**) התכונה "השתנות חסומה של f_p" היא מונוטונית ב-p; כלומר, אם ל-f_{p_1} יש השתנות חסומה, ו- $p_1<p_2$, אז ל-f_{p_2} יש השתנות חסומה. (נובע מהעובדה ש- $f_{p_2}(x) = x^{(p_2-p_1)}\cdot f_{p_1}(x)$, ועבור חזקה חיובית (p_2-p_1) מתקיים $x^{p_2-p_1}<1$). לכן אוסף ה-p-ים שעבורם ל-f_p יש ה.ח. הוא מהצורה (p_c,∞) או $[p_c,\infty)$ (הקצה פתוח או סגור כתלות בהתנהגות f_{p_c} - עבור ה-p הקריטי).

(***) נתבונן בסדרת הנקודות $x_n=\frac{1}{n}$. $f_p(x_n)=\frac{(-1)^n}{n^p}$.

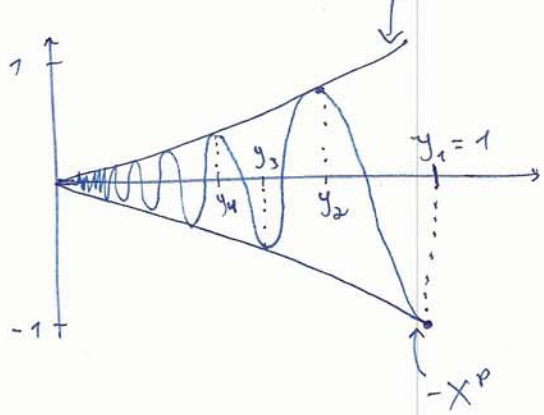
עבור $\boxed{p\in[0,1]}$, מתקיים;

$$\forall N.\ \bigvee_0^1 f_p \ge \sum_{n=1}^{N}|f_p(x_{n+1})-f_p(x_n)| = \sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{n^p}\right] > \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p} \longrightarrow$$ סדרת סכומים חלקיים של טור מתבדר.

ולכן עבור $\rho\in[0,1]$, $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_\rho = \infty$ כלומר ל- f_ρ
אין השתנות חסומה.

** עבור $\boxed{1<\rho}$, אותה בנ"ה של חלוקות $\left([0,\frac{1}{N},\frac{1}{N-1},\dots,\frac{1}{2},1]\right)$
תוביל אותנו למסקנה ש- $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_\rho > \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\rho}\right)\in\mathbb{R}$, כלומר;
בדרך זו הצלחנו להראות ש- $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_\rho$ גדולה יותר ממספר סופי,
ולא מסדרת מספרים מתבדרת. לכן נרצה להוכיח (כנראה...)
שעבור $1<\rho$ ל- f_ρ <u>יש</u> השתנות חסומה.

כזכור, על קטע $[a,b]$ שבו f <u>מונוטונית</u>, ההשתנות
נתונה ע"י $|f(b)-f(a)|$. לכן, אם נסמן $y_1=1$,
$y_2=$ נקודת הקיצון הקרובה ביותר של f_ρ ל-1, y_3 - נקודת
הקיצון הבאה (וכן הלאה...), נקבל;



כעת, ההשתנות היא ליניארית
בתתי הקטעים, כלומר;

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f_\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \overset{y_{n+1}}{\underset{y_n}{V}} f_\rho$$

שימו לב ש- $y_n\neq x_n$, כלומר, נקודות הקיצון של $x^\rho\cdot\cos(\frac{\pi}{x})$
הן לא אותן נקודות כמו של $\cos(\frac{\pi}{x})$. אבל חישוב
כפשוט (הדרישה $f'_\rho(y_n)=0$) נותן $\tan\left(\frac{\pi}{y_n}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{y_n}\right)=-\rho$.

זה אומר ש- $\tan\left(\frac{\pi}{y_n}\right) = \left(-\frac{p}{\pi}\right)\cdot y_n$, כלומר $\tan\left(\frac{\pi}{y_n}\right) \to 0$,

למעשה, חישוב נוסף (פה רחני; אבל כדאי להשלים אם הרצון לזו
בתור לכם) אומר שלצורך חישוב ההשתנות ניתן להניח
ש- $y_n = x_n$ (למרות שאין שוויון באמת; הכוונה היא
ש- $\frac{1}{2}\overset{x_{n+1}}{\underset{x_n}{V}} f_p \le \overset{y_{n+1}}{\underset{y_n}{V}} f_p \le 2\cdot \overset{x_{n+1}}{\underset{x_n}{V}} f_p$). כעקרון,

$$\overset{1}{\underset{0}{V}} f_p \le 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty} \overset{x_{n+1}}{\underset{x_n}{V}} f_p = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^p}+\frac{1}{n^p}\right| < 2^2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} < \infty$$

כלומר $\overset{1}{\underset{0}{V}} f_p < \infty$, ול- f_p יש השתנות חסומה.

---

⑥ אורך העקומה ניתן ע"י:

$$l = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2_{(t)}+\dot{y}^2_{(t)}}\,dt = \left(\begin{matrix}\text{נבצע החלפת} \\ x_{(t)} \quad \text{משתנים}\end{matrix}\right) = \int_{x(a)}^{x(b)} \sqrt{1+\left[\frac{\dot{y}_{(t)}}{\dot{x}_{(t)}}\right]^2}\cdot \cancel{\dot{x}_{(t)}}\cdot\frac{1}{\cancel{\dot{x}_{(t)}}}\,dx \to \text{מש"ל.}$$

1. $\gamma(t) = (t, \ln(\cos t))$. $x(t) = t$, $x' = 1$

$y(t) = \ln(\cos t)$, $y' = \frac{1}{\cos t}(-\sin t)$

$= -tg(t)$

אורך $= \int_0^{\pi/6} \sqrt{1^2 + tg^2(t)} = \int_0^{\pi/6} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}\, dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos t} = \dots =$

$= \frac{1}{2} \ln\left(\left|\frac{\sin t + 1}{\sin t - 1}\right|\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{1}{2}\ln 3$

2. $\gamma(t) = ((1+\cos t)\cos t, (1+\cos t)\sin t))$

$x' = -\sin 2t - \sin t$, $y' = \cos t + \cos 2t$ וחישוב ניתן;

אורך $= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\sin t + \sin 2t)^2 + (\cos t + \cos 2t)^2} =$

$= \underset{\text{זהויות טריג'}}{\dots} = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + 2\cos t} = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos t} = \begin{bmatrix} u = \cos t \\ du = -\sin t\, dt \end{bmatrix}$

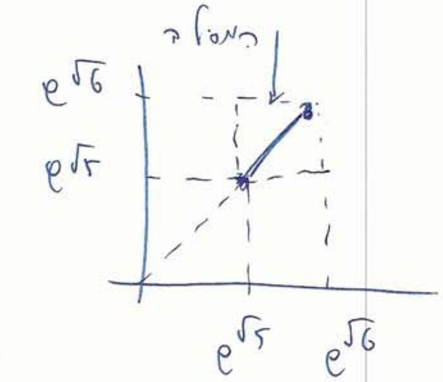
($0 \le t \le \pi$ [illegible] ולכן $-\sin t = -\sqrt{1-\cos^2 t}$ (ושים לב:

$= -2\sqrt{2} \int \frac{1}{\sqrt{1-u}}\, du = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{1-u}}{1/2}\right) = 4\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}\,\Big|_0^{\pi} = \underline{8}$

[illegible]

(6)

אפשר להשתמש כאן בנוסחא אבל יש דרך לינארית יותר



אורך המסילה = $\sqrt2\,(e^{\sqrt6}-e^{\sqrt5})$

= אורך של אלכסון ריבוע עם צלע באורך $e^{\sqrt6}-e^{\sqrt5}$.

(8) (א) עבור נקודה במישור $v=(x,y)$ נגדיר מרחק מהראשית: $\|v\|=\sqrt{x^2+y^2}$

טענה: $\|v+w\| \le \|v\| + \|w\|$. הוכחה: ע"י העלאה בריבוע ופישוט

סיבוכיים מספיק בעצם..

מסקנה: אם $d(v,w)=\|v-w\|$ (מרחק בין v ו- w) אז

$$d(v,w)+d(w,z) \ge d(v,z)$$

(אי שוויון המשולש).

מסקנה באינדוקציה; אם $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{R}^2$ אז

$$d(z_0,z_1)+d(z_1,z_2)+\dots+d(z_{n-1},z_n) \ge d(z_0,z_n)$$

עכשיו, הטענה נובעת ישירות מהגדרת אורך קו.

(ב) $\tilde{\gamma}$ אורך $= \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x(\varphi(s))'\right)^2 + \left(y(\varphi(s))'\right)^2}\, ds =$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ נסמן

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(\varphi(s))\right)^2 + \left(y'(\varphi(s))\right)^2}\, \varphi'(s)\, ds = \int_{a}^{b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \text{אורך}_{\gamma}$$

$\varphi' \geq 0$

$t = \varphi(s)$

$dt = \varphi'(s)\, ds$

$\boxtimes$

סמסטר ב', תשע"א

חדו"א 2 - תרגיל מס' 6

1. חשבו את הגבולות של סדרות הפונקציות הבאות. באילו מקרים ההתכנסות היא במידה שווה?
   (א) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}$ ב- $[0,\infty)$.
   (ב) $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.
   (ג) $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x^2}{n}\right)^n$ ב- (i) כל $\mathbb{R}$, (ii) הקטע $[-A,A]$ עבור $A>0$.
   (ד) $f_n(x) = \sqrt{n+1}\sin^n(x)\cos(x)$
2. תהי $\{f_n : E \to \mathbb{R}\}$ סדרת פונקציות המתכנסת במ"ש ב E לפונקציה f. הוכיחו:
   (א) $\sup_E f_n \to \sup_E f$
   (ב) $\inf_E f_n \to \inf_E f$
3. תהי $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ סדרת פונקציות רציפות המתכנסת במ"ש ל f. נתונה סדרה מתכנסת $a_n \to L$ שכל איבריה ב $[a,b]$. הוכיחו ש $f_n(a_n) \to f(L)$
4. בדקו האם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים במידה שווה:
   (א) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ ב- $[-q,q]$ עבור $q<1$
   (ב) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ ב- $\mathbb{R}$
   (ג) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ ב- $\mathbb{R}$
   (ד) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|x-n|}$ ב- $[0,\infty)$
   (ה) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n})$ עבור $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$
   (ו) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}$ ב- $[0,\infty)$
   (ז) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \min\left(xn!\ ,\ \frac{1}{xn!}\right)$ ב- $(0,\infty)$
5. תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונגדיר $f_n(x) = f(\frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor)$. הוכיחו ש- $f_n \to f$ במ"ש ב- $[0,1]$.
   (כלומר, אפשר לקרב פונקציה רציפה במידה שווה ע"י פונקציות מדרגה).
6. (א) מצאו דוגמא לסדרת פונקציות שאינן רציפות המתכנסות במ"ש לפונקציה רציפה.
   (ב) מצאו דוגמא לסדרת פונקציות רציפות המתכנסות לא במ"ש לפונקציה רציפה.
7. היזכרו בהוכחת משפט דיני, והוכיחו את הטענה הבאה: תהי $\{f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\}$ סדרת פונקציות גזירות המתכנסת נקודתית לפונקציה f. נניח שקיים $M>0$ כך ש-
   $$\sup_n \sup_{x\in[a,b]} |f_n'(x)| \le M$$
   אזי ההתכנסות היא במידה שווה.
8. תהי $\{P_n(x)\}$ סדרת פולינומים המתכנסת במידה שווה <u>בכל</u> $\mathbb{R}$ לפונקציה $P(x)$.
   (א) הראו כי $P(x)$ הוא פולינום.
   (ב) איך זה מסתדר עם משפט ויירשטראס על קירוב פולינומיאלי של פונקציות רציפות?

סמסטר ב', תשע"א

חדו"א 2 ־ פתרונות נבחרים לתרגיל מס' 6

1. (א) לא קשה לוודא שעבור $x \in [0,1]$ $f_n(x) \to 1$ ועבור $x \in [1,\infty)$, $f_n(x) \to x$. כמו כן ההתכנסות היא במ"ש היות ומלגרנז' מתקיים: עבור $x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - 1| = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + x^n - 1}{x_1^{1-\frac{1}{n}}} \leq \frac{1}{n}$$

עבור $1 \leq x_1 \leq 1 + x^n$. באופן דומה $|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n}$ לכל $x \in [x,\infty)$. לכן ההתכנסות היא במ"ש.

(ב) ההתכנסות הנקודתית היא ל 0 אך אינה במ"ש ע"י הצבת $x_n = \frac{1}{n}$.

(ג) ההתכנסות הנקודתית הא ל e^{-x^2}. עבור כל קטע סגור $[-A,A]$ מתקיימים תנאי משפט דיני ולכן יש התכנסות במ"ש. על הישר כולו אין התכנסות במ"ש היות ו־ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = \pm\infty$ ולכן $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x) - f_n(x)| = \infty$.

(ד) עבור $|\sin x| < 1$ יש התכנסות נקודתית ל 0. עבור $|\sin x| = 1$ מתקיים $|\cos x| = 0$ ולכן שוב ההתכנסותהיא ל 0. ע"י גזירה מקבלים שהמקסימום הוא ב $\tan^2 x_n = n$. הצבת המקסימום נותנת:

$$|f_n(x_n) - 0| = \sqrt{n+1}\tan^n x_n \cos^{n+1} x_n = \sqrt{n+1} \cdot n^{n/2} \cdot [\frac{1}{n+1}]^{(n+1)/2} =$$
$$= (1 - \frac{1}{n+1})^{n/2} \to \frac{1}{\sqrt{e}}$$

ולכן אין התכנסות במ"ש.

2. (א) מהנתון, החל ממקום מסוים מתקיים $f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$. האגף הימני נותן ש $f_n(x) \leq \sup f(x) + \varepsilon$ ולכן $\sup f_n(x) \leq \sup f(x) + \varepsilon$. האגף השמאלי נותן תחילה $f(x) - \varepsilon \leq \sup f_n(x)$ ואז $\sup f(x) - \varepsilon \leq \sup f_n(x)$. סה"כ קיבלנו

$$|\sup f(x) - \sup f_n(x)| \leq \varepsilon$$

כלומר $\sup f_n(x) \to \sup f(x)$.

(ב) באופן דומה לסעיף הקודם.

3. מרציפות f ב־ L קיים $\delta > 0$ כך שאם $|x - L| < \delta$ אז $|f(x) - f(L)| < \frac{\varepsilon}{2}$. כעת, קיים N שהחל ממנו $|a_n - L| < \delta$ ולכן $|f(a_n) - f(L)| < \frac{\varepsilon}{2}$. כמו כן מהתכנסות במ"ש קיים M שהחל ממנו $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. לכן החל מהמקסימום בין N ל M מתקיים

$$|f_n(a_n) - f(L)| \leq |f(a_n) - f(L)| + |f(a_n) - f_n(a_n)| < \varepsilon$$

כנדרש.

4. (א) מתכנס במ"ש: לכל $x \in [-q,q]$ מתקיים $|nx^{n-1}| \le nq^{n-1}$ וכן $\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}$ הוא טור מתכנס. ע"פ מבחן M, הטור המקורי מתכנס במ"ש.

(ב) הטור אינו מתכנס במידה שווה. כדי להראות זאת נמצא סדרת נקודות $\{x_N\}$ כך ששארית הטור $R_N(x) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} \underset{N\to\infty}{\not\to} 0$. נשים לב כי

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(1+x^2)^n} \right\} = x^2 \left\{ \frac{1}{1-\frac{1}{1+x^2}} - \frac{1-\frac{1}{(1+x^2)^N}}{1-\frac{1}{1+x^2}} \right\}$$
$$= x^2 \frac{\left(\frac{1}{(1+x^2)^{N-1}}\right)}{x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{N-1}}$$

כעת, אם נבחר $x_N = \frac{1}{\sqrt{N-1}}$ נקבל $R_N(x_N) = \frac{1}{(1+\frac{1}{N-1})^{N-1}} \approx \frac{1}{e}$, כלומר $\lim_{N\to\infty} R_N(x_N) \neq 0$.

(ג) לכל x קבוע, הסדרה $\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ מונוטונית יורדת ל 0 (כלומר יש התכנסות נקודתית). כמו כן הסדרה מתכנסת במ"ש ל 0 מאחר ואם מציבים את נקודות המקסימום x_n לכל n יש התכנסות ל 0. כעת, מקריטריון לייבניץ, הטור מתכנס במ"ש.

(ד) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-|x-n|}$ מתכנס במ"ש אם ורק אם שארית הטור $\sum_{n=N}^{\infty} e^{-|x-n|}$ מתכנסת במ"ש ל 0 (זה בעצם מבחן קושי להתכנסות במ"ש). אך, עבור סדרת הנקודות $x_N = N+1$ נקבל

$$\sum_{n=N}^{\infty} e^{-|x_N-n|} \ge \frac{1}{e}$$

כלומר, הטור איננו מתכנס במ"ש.

(ה) היות ו $\frac{1}{2} \le |x| \le 2$, מתקיים $|x^n + x^{-n}| \le |x|^n + |x|^{-n} \le 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$. לכן,

$$\left| \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n}) \right| \le \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}.$$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}} 2^{n+1}$ מתכנס, ע"פ מבחן ד'למברט (ודאו זאת). לכן, ממבחן־M, הטור המקורי מתכנס במ"ש.

(ו) ע"י חקירת הפונקציה $x^2 e^{-nx}$ מוצאים שהמקסימום הוא ב $x_n = \frac{2}{n}$. לכן, לכל $x \ge 0$ מתקיים

$$|x^2 e^{-nx}| = x^2 e^{-nx} \le \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-2}.$$

הטור $\sum \left(\frac{2}{n}\right)^2 e^{-2}$ מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס במ"ש.

(ז) נשים לב כי בתחום $x \ge 1$ מתקיים כי $f_n(x) = \min\{xn!,\ \frac{1}{xn!}\} = \frac{1}{xn!} \le \frac{1}{n!}$. הטור $\sum \frac{1}{n!}$ מתכנס ולכן הטור המקורי מתכנס במ"ש בתחום זה. אך, בתחום $0 < x < 1$ הטור

איננו מתכנס במ"ש. נתבונן בסדרה $x_k = \frac{1}{k!}$. אזי $f_k(x_k) = 1$ ולכן שארית הטור $R_k(x_k)$ מקיימת

$$R_k(x_k) = \sum_{n=k}^{\infty} f_n(x_k) \geq f_k(x_k) = 1$$

ולכן הטור אינו מתכנס במ"ש בתחום $(0,1)$.

5. יהי $\varepsilon > 0$. הפונקציה f רציפה על $[0,1]$ ולכן רציפה במ"ש. לכן, קיים $N > 0$ כך שלכל $x, y \in [0,1]$ המקיימים $|x-y| < \frac{1}{N}$ מתקיים $f(x) - f(y) < \varepsilon$. נשים לב כי לכל $n > N$ מתקיים

$$x = \frac{1}{n}xn \leq \frac{1}{n}[xn] \leq \frac{1}{n}(xn+1) = x + \frac{1}{n}.$$

כלומר $|x - \frac{1}{n}[xn]| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$ ולכן

$$|f(x) - f\left(\frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor\right)| < \varepsilon$$

לכל $x \in [0,1]$, כלומר $f_n \rightrightarrows f$.

6. (א) סדרת הפונקציות $f_n(x) = \frac{1}{n}D(x)$ בקטע $[0,1]$, כאשר $D(x)$ היא פונקצית דריכלה, היא סדרת פונקציות אשר אינן רציפות, אך בבירור מתכנסות במ"ש ל 0 (ודאו זאת).

(ב) ראינו בתרגול סדרת פונקציות כנ"ל:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ -nx+2 & \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

מתכנסת נקודתית ל 0 אך איננה מתכנסת במ"ש (תמיד יהיו נקודות עם ערך 1).

7. ראשית כל, נשים לב שע"פ הנתון ומשפט לגרנז', קיים $M > 0$ עבורו מתקיים:

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq M|x - x_0| \tag{1}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x, x_0 \in [a,b]$. כעת, נראה ש f רציפה. יהי $x_0 \in [a,b]$ ויהי $\varepsilon > 0$. אזי, מ (1) נובע שקיים $\delta > 0$ כך שלכל x בסביבת δ של x_0 מתקיים $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon/3$. כמו כן, מתקיים

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

היות ו- $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית, אפשר לבחור n מספיק גדול כך שהמחובר הראשון והאחרון יהיו קטנים מ $\varepsilon/3$ ולכן, f רציפה. כעת, נניח בשלילה ש f_n איננה מתכנסת במ"ש ל f, כלומר קיים $\varepsilon_0 > 0$ וקיימת סדרת נקודות $\{x_n\} \subset [a,b]$ כך שלכל n מתקיים

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

מאחר והסדרה $\{x_n\}$ חסומה, יש לה תת־סדרה $\{x_{n_k}\}$ המתכנסת לנקודה $x_0 \in [a,b]$. מתקיים

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| \le |f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| + |f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_{n_k})| \quad (2)$$

מרציפות f, קיים k גדול מספיק, עבורו $|f(x_0) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_0/3$. כמו כן, מ (1) נובע שעבור k גדול מספיק $|f_{n_k}(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_0)| \ge M|x_{n_k} - x_0| < \varepsilon_0/3$. לבסוף, מהתכנסות נקודתית של f_n) נובע שעבור k מספיק גדול מתקיים $|f_{n_k}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon_0$. סה"כ, הא"ש ב (2) נותן

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| < \varepsilon_0$$

וזאת בסתירה להנחה שלנו. לכן, f_n מתכנסת במ"ש ל f ב $[a,b]$.

8. ע"פ קריטריון קושי להתכנסות במ"ש, לכל $\varepsilon > 0$ קיים N טבעי כך שלכל $n, m \ge N$ מתקיים

$$|P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

וזאת לכל $x \in \mathbb{R}$. נשים לב כי $P_n(x) - P_m(x)$ הוא פולינום, החסום (ע"י ε) ב $\mathbb{R}$. נזכר כי פולינום ב $\mathbb{R}$ חסום רק אם הוא פולינום קבוע (כלומר פונקציה קבועה). מכאן נובע כי החל מ N, כל שני פולינומים בסדרה נבדלים זה מזה בקבוע. כלומר לכל $n > N$ מתקיים

$$.P_n(x) = P_N(x) + a_n$$

היות ו$P_n(x)$ מתכנסת נקודתית, קיים הגבול $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ והוא $a = P(0) - P_N(0)$. לכן הפונקציה הגבולית מקיימת $P(x) = P_N(x) + a$, כלומר היא פולינום.

חדו"א 2 - תרגיל מס' 7

1. (א) עבור $f_n(x) = nx/(1+nx)$, ו- $x \in [0,1]$, חשבו את $\lim_{n\to\infty} \int_0^x f_n(t)dt$.

(ב) האם מותר לגזור איבר-איבר את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{x}{n^2}$? (ולקבל נגזרת של הסכום, כמובן)?

2. (א) הוכיחו ש- $\int_0^1 x^n \ln^m x \, dx = \frac{(-1)^m m!}{(n+1)^{m+1}}$ לכל $m, n \geq 0$.

(ב) הוכיחו ש-

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$$

(רמז: $x^{-x} = e^{-x \ln x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \ln^n x$.).

3. הראו שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)$$

מתכנס בכל x ומגדיר פונקציה גזירה ברציפות על $\mathbb{R}$.

4. נתון $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$, כאשר $0 < \lambda_n < \lambda_{n+1}$ לכל n. בנוסף, נתון שהטור מתכנס בנקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. הוכיחו שהטור מתכנס במ"ש ב- $[x_0, \infty)$.

5. הוכיחו את מבחן $Abel$: נתונות סדרות פונקציות $\{f_n(x)\}$, $\{g_n(x)\}$ בתחום D. נניח ש $\sum g_n(x)$ מתכנס במ"ש ב D. נניח שלכל $x \in D$, $\{f_n(x)\}$ מונוטונית וש- $|f_n(x)| \leq L$ לכל n וכל $x \in D$. אזי, $\sum f_n(x) g_n(x)$ מתכנס במ"ש ב- D. העזרו בהדרכה הבאה:

(א) הוכיחו את הלמה הבאה (הטרנספורמציה של Abel): עבור שתי סדרות מספרים $\alpha_1, ..., \alpha_m$ ו- $\beta_1, ..., \beta_m$ מתקיים $\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i = \alpha_m \beta_m - \sum_{i=1}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) B_i$, כאשר $B_k = \beta_1 + \cdots + \beta_k$.

(ב) הוכיחו שאם בנוסף, $\alpha_1, ..., \alpha_m$ היא סדרה מונוטונית ו- $|B_k| \leq M$ לכל $1 \leq k \leq m$ אזי $|\sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i| \leq M(2|\alpha_m| + |\alpha_1|)$

(ג) השתמשו בקריטריון קושי כדי להראות שהחל מ-n מסוים $|\sum_{i=1}^m g_{n+i}(x)| < \frac{\epsilon}{3L}$ (עבור ϵ נתון וכל $x \in D$) והשתמשו בסעיף הקודם כדי להסיק ש $\sum f_n(x) g_n(x)$ מתכנס במ"ש ב D.

<u>חדו"א 2 - פתרונות נבחרים לתרגיל מס' 7</u>

1. (א) נשים לב כי מתקיים $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} = 1 - \dfrac{1}{1+nx}$ ולכן

$$\int_0^x f_n(t)\,dt = x - \frac{\ln(1+nx)}{n}.$$

מכאן נקבל

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^x f_n(t)\,dt = x - \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+nx)}{n} = x$$

<u>הערה</u>: שימו לב כי הסדרה איננה מתכנסת במ"ש ולכן אין הצדקה להכנס עם הגבול לתוך האינטגרל, אף על פי שמתקבלת אותה התוצאה.

(ב) ראשית, ב $x=0$ הטור $\sum \arctan(\frac{x}{n^2})$ מתכנס נקודתית ל 0. כמו כן, מתקיים:

$$f_n'(x) = [\arctan(\frac{x}{n^2})]' = \frac{1}{1+x^2/n^4}\cdot\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}} \le \frac{1}{n^2}$$

לכן, ע"פ ויירשטראס, הטור $\sum f_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$. כעת, שימו לב שאי אפשר להפעיל את המשפט בדבר גזירה איבר־איבר ולהסיק שהטור המקורי $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$ (ואכן הוא לא: קחו את $x_n = n^2$ והתבוננו בשארית הטור). אבל, עבור $x \in \mathbb{R}$ כלשהו, נבחר קטע סגור $[-M, M]$ המכיל את x ושם, אנו עומדים בתנאי המשפט בדבר גזירה איבר־איבר, וניתן להסיק שטור הנגזרות מתכנס לנגזרת הסכום.

2. (א) נסמן $I_{m,n} = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln^m(x)dx$. שימוש באינטגרציה בחלקים נותן

$$I_{m,n} = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\ln^m(x)\right]_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{m-1}dx = -\frac{m}{n+1}I_{m-1,n}$$

ולכן $I_{m,n} = \dfrac{(-1)^m\cdot m!}{(n+1)^m}\cdot I_{0,n}$. חישוב פשוט נותן $I_{0,n} = \frac{1}{n+1}$ ולכן $I_{m,n} = \dfrac{(-1)^m\cdot m!}{(n+1)^{m+1}}$

(ב) ראשית, נראה שהטור באגף ימין של הרמז מתכנס במ"ש ב $[0,1]$. אכן, חיפוש נקודות קיצון של הפונקציה $x^n\cdot ln^n(x)$ (ע"י גזירה) נותן כי יש נקודת קיצון אחת בפנים הקטע והיא ב־ $\frac{1}{e}$. כמו כן, בקצוות הפונקציה מתאפסת ולכן $\left|\frac{(-1)^n}{n!}x^n\cdot ln^n(x)\right| \le \frac{1}{e^n\cdot n!}$. לכן, ממבחן

M של ויירשטראס, נובע שהטור מתכנס במ"ש. כעת, ניתן לבצע אינטגרציה איבר־איבר ולקבל (תוך שימוש בסעיף הראשון של השאלה):

$$\int_0^1 x^{-x}dx = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\cdot\int_0^1 x^n \ln^n(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\cdot(-1)^n\cdot\frac{n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^\infty n^{-n}$$

כנדרש.

3. ראשית, בדומה לשאלה 1 סעיף א', ב $x=0$ הטור $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})$ מתכנס נקודתית ל 0. כמו כן, מתקיים:

$$f_n'(x) = [\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{n}})]' = (-1)^n\frac{1}{n+x^2}$$

היות ו־ $\frac{1}{n+x^2}$ יורד מונוטונית ל 0, נובע מקריטריון לייבניץ כי הטור $\sum f_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$. לכן, ע"פ משפט, בכל קטע סגור $[-M.M]$ הטור המקורי מתכנס במ"ש, גזיר וניתן לגזור איבא־איבר. בפרט, הטור מתכנס נקודתית בכל $x\in\mathbb{R}$ ולפיכך, הטור מגדיר פונקציה על $\mathbb{R}$. בנוסף, היות וטור הנגזרות הוא טור של פונקציות רציפות המתכנס במ"ש (שוב, בכל קטע סגור) נובע כי הוא מתכנס לפונקציה רציפה. לכן הטור המקורי מגדיר פונקציה גזירה ברציפות.

4. לכל $x\geq x_0$ מתקיים

$$\sum a_n e^{\lambda_n x} = \sum a_n e^{-\lambda_n x_0} e^{-\lambda_n(x-x_0)}$$

הפונקציה $e^{-\lambda_n x_0}$ מונוטונית ב n ע"פ הנתון $\lambda_n < \lambda_{n+1},\ldots$. כמו כן, ע"פ הנתון, הטור $\sum a_n e^{-\lambda_n x_0}$ מתכנס. לכן, ע"פ קריטריון $Abel$, הטור מתכנס במ"ש ב $[x_0,\infty)$.

5. (א) נגדיר $\beta_0=0$. מתקיים

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i\beta_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i(B_i - B_{i-1}) = \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i - \sum_{i=1}^m \alpha_i B_{i-1} =$$
$$= \alpha_m B_m + \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i B_i - \sum_{i=1}^{m-1}\alpha_{i+1}B_i = \alpha_m B_m + \sum_{i=1}^{m-1}(\alpha_{i+1}-\alpha_i)B_i$$

(ב) נשים לב כי ממונוטוניות הסדרה $\{\alpha_i\}$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i| = |\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_{i+1}-\alpha_i| = |\alpha_m-\alpha_1| \leq |\alpha_1|+|\alpha_m|$$

מסעיף א נובע כי

$$|\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i\beta_i| \leq |\alpha_m||B_m| + \sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i||B_m| \leq$$
$$\leq M(|\alpha_m| + \sum_{i=1}^{m-1}|\alpha_{i+1}-\alpha_i|) \leq M(2|\alpha_m|+|\alpha_1|)$$

(ג) יהי $\varepsilon > 0$. $\sum g_n(x)$ מתכנס במ"ש ב D ולכן ע"פ קריטריון קושי קיים N כך שלכל $n > N$ ולכל $m \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$|\sum_{i=1}^{m} g_{n+i}(x)| < \frac{\varepsilon}{3L}$$

לכל $x \in D$. מסעיף ב', מתקיים

$$|\sum_{i=1}^{m} f_{n+i} \cdot g_{n+i}| \leq \frac{\varepsilon}{3L}(2|f_{n+m}(x)| + |f_{n+1}(x)|) \leq \varepsilon$$

ולכן, ע"פ קריטריון קושי, הטור $\sum f_n(x)g_n(x)$ מתכנס במ"ש ב D.

סמסטר ב', תשע"א

חדו"א 2 - תרגיל מס' 8

1. מצאו ביטויים סגורים (בלי סכום) לטורי החזקות הבאים, וחשבו רדיוס התכנסות:

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)},\quad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$$

2. פתחו לטור חזקות (סביב $x_0=0$) את הפונקציות הבאות, ומצאו רדיוס התכנסות:

$$(a)\ \log\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right),\quad (b)\ (1+x^2)\arctan(x),\quad (c)\ \int_0^x\frac{\sin t}{t}dt$$

$$(d)\ \frac{x}{(1-x)(1-x^2)},\quad (e)\ \sin^3 x$$

(כדאי לפשט את $\sin^3 x$ באמצעות זהויות טריגונומטריות).

3. מצאו טור חזקות $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, שמתכנס בכל $\mathbb{R}$, כך ש-

(א) $f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(x)=f(x)\ \ \forall x$

(ב) $f(0)=1,\quad f'(0)=1,\quad f''(x)=-f(x)\ \ \forall x$

4. תהי $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרת פיבונצ'י: $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$. נסמן $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. הוכיחו ש-$f(x)=1/(1-x-x^2)$ בתחום ההתכנסות, מצאו את הפרוק לשברים חלקיים ורשמו את סדרת פיבונצ'י כסכום של שתי סדרות הנדסיות.

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים, כך שלכל n ולכל $x\geq 0$ מתקיים:

$$f^{(n)}(x)\geq 0$$

הוכיחו שטור טיילור של f סביב הראשית מתכנס ל- f ב $\mathbb{R}^+$. האם ההתכנסות היא בכל הישר? רמז: אפשר להשתמש בנוסחא האינטגרלית לשארית בטור טיילור, ולהראות ש-

$$R_n(x)\leq (x/y)^{n+1}R_n(y)\leq (x/y)^{n+1}f(y)$$

לכל $0<x<y$.

6. חשבו את הסכומים הבאים, באמצעות טורי חזקות:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n},\quad (b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n},\quad (c)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^23^n}.$$

7. מצאו שני טורי חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ו־ $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ עם רדיוסי התכנסות $R_1,\ R_2$ כך שמכפלת קושי שלהם $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ($c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$) בעלת רדיוס התכנסות R ומתקיים

(א) $R > \min\{R_1, R_2\}$

(ב) $R = \min\{R_1, R_2\}$

(ג) $\max\{R_1, R_2\} < R < \infty$

8. מצאו דוגמה לטור מספרים בעל סכום Abel סופי, אך ללא סכום צ'זרו. <u>רמז</u>: הוכיחו שאם $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס לפי צ'זרו, אז $a_n/n \to 0$.

חדו"א 2 - פיתרון 8

① ⓒ $\int x^{4n}=\frac{x^{4n+1}}{4n+1} \Rightarrow \int\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}$

$\Leftarrow$ $f(x):=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)$ היא (אחת ה-) קדומה של $g(x)=\frac{1}{1-x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}$

אחרי שנמצא את אוסף כל הקדומות של $g(x)$, נבחר מתוכן את $f(x)$ באמצעות הדרישה $f(0)=\left(\substack{\text{הצבה}\\\text{ישירה}}\right)=0$.

$\int\frac{1}{1-x^4}=?\xrightarrow[\text{חלקיים}]{\text{פירוק לשברים}}\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{(1+x^2)(1-x^2)}=\frac{1}{(1+x^2)(1+x)(1-x)}$

סה"כ מתקבל לאחר הסידור: $\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-x}$

$\Rightarrow\int\frac{1}{1-x^4}=\frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+C$

$f(0)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow$ $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}=\frac{1}{2}\arctan(x)+\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ $\leftarrow$ רדיוס ההתכנסות (לפי $\sqrt[n]{|a_n|}$) הוא $R=1$.

ⓑ ~~$\int\frac{x^n}{n(n+1)}=\frac{x^{n+1}}{n+1}+a$, $\int\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+a\right)=x^{n+2}+ax+b$~~

~~$\Leftarrow$ $f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$ היא קדומה של קדומה~~

$\int x^{n-1}=\frac{x^n}{n}$, $\int\frac{x^n}{n}=\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x\cdot\frac{x^n}{n(n+1)}$

לכן, אם נגדיר $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$, נקבל ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x\cdot f(x)$ היא קדומה של קדומה של $\frac{1}{1-x}=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$.

$\int\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)+a$; $\int(-\ln(1-x)+a)=\boxed{x+(1-x)\ln(1-x)+ax+b}\rightarrow$ זו קדומה כלשהי של קדומה כלשהי של $(1-x)^{-1}$.

נשים לב שהטור של $x\cdot f(x)$ מתחיל מהחזקה x^2 (הציבו $n=1$). לכן יש לדרוש
$(x\cdot f(x))|_{x=0}=(x\cdot f(x))'|_{x=0}=0$

הדרישה $(x\cdot f(x))'\big|_{x=0}$ היא בדיוק: $\left(-\ln(1-x)+a\right)\big|_{x=0}=0$

כלומר $a=0$. הדרישה $(x\cdot f(x))\big|_{x=0}=0$ היא בדיוק $b=0$, באופן זהה.

לכן: $x\cdot f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}=x+(1-x)\ln(1-x)$. ואחרי חלוקה ב- x נקבל:

$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n}}{n(n+1)}=1+\left(\frac{1-x}{x}\right)\cdot\ln(1-x)}$, עם רדיוס התכנסות: $\boxed{R=\lim\sqrt[n]{n(n+1)}=1}$.

(a)

<u>כאן אפשר ללמוד טריק כללי:</u>

ישר ניתן לזהות ש- $\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ הם בדיוק האיברים הזוגיים (אינדקס זוגי) של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, כלומר שמתאימים לפונקציה e^x. זה אומר

שהטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ <u>מתכנס לחלק הזוגי של e^x</u>.

> <u>תזכורת:</u> אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי: אז החלק הזוגי והאי-זוגי שלה מוגדרים
> כך: $f_{even}(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$, $f_{odd}(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$, ומתקיים: (בדוק)
> f_{even} - פונ' זוגית. f_{odd} - פונ' אי-זוגית. $f=f_{even}+f_{odd}$ (והפירוק הזה יחיד!)

את העובדה שטור האיברים הזוגיים מתכנס לחלק הזוגי נוכיח באופן הבא;

נניח ש- $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. אז:

$$\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)=\frac{1}{2}\left(\sum a_nx^n+\sum a_n(-1)^nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n+(-1)^na_n}{2}x^n$$

עבור n זוגי; $(-1)^n=1$ ולכן $\frac{1}{2}(a_n+(-1)^na_n)=a_n$.

עבור n אי-זוגי; $(-1)^n=-1$ ולכן $\frac{1}{2}(a_n+(-1)^na_n)=0$

לכן: $\frac{f(x)+f(-x)}{2}=\sum_{\substack{n=0\\ n\text{ זוגי}}}^{\infty}a_n\cdot x^n$, וטור זה ניתן לכתוב; $\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}\cdot x^{2n}$.

לענייננו: $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\equiv\cosh(x)}\xrightarrow{(e^x\text{-כמו ב})}\boxed{R=\infty}$.

ⓐ $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\log(1+x)-\log(1-x)}{2} \longrightarrow$ $\boxed{\text{החלק האי-זוגי של } \log(1+x)}$ ②

נניח ש- $\log(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $\Leftarrow$ $\frac{1}{1+x} = \left(\log(1+x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot x^{n-1} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot x^n$$

נשווה לטור של $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n$, ונסיק: $a_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}$ $(\forall n\geq 0)$

לכן לכל $\underline{\underline{n\geq 1}}$: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, ועבור a_0 נקבל:

$$a_0 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\Big|_{x=0} = \log(1+x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n}$$

בדומה לסימון ב-ⓐ1, החלק האי-זוגי של $f(x)$ ניתן ע"י טור האיברים האי-זוגיים, מתוך הטור של f. לכן:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} \overset{(n=2m+1)}{=} \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2m+1+1}}{2m+1}\cdot x^{2m+1} = \boxed{\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m+1}}{2m+1} \quad ; R=1}$$

<u>הערה:</u> שימו לב שזהו גם הטור של החלק האי-זוגי של, נאמר, $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

איך זה מתיישב עם העובדה שראינו שזה החלק האי"ז של $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n}$?

בקלות. ואכן, לטור האי-זוגי שלנו ניתן להוסיף כל מיני חלקים זוגיים <u>שונים</u>,

ולכן פו"ת שיתקבלו יהיו חלקים אי-זוגיים שווים, וחלקים זוגיים שונים.

(ב-ⓑ1 ראינו ש- $-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n}$, ובדיקה קלה תגלה

שאכן החלק האי-זוגי של $-\ln(1-x)$ הוא גם $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.)

(2b) בתרגיל הזה נשתמש בעובדה ש- $\boxed{atan(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}}$

(אם לא ראיתם כיצד זה אז שכחתם איך מגיעים אליו, עקבו אחרי שתי העובדות: $(atan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, ו-! $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n\geq 0}(-x^2)^n$).

יש שתי דרכים למצוא את טור החזקות של $(1+x^2)atan(x) = f(x)$.

— האחת משתמשת בגזירה שלו, $f'(x) = 2x \cdot atan(x) + \frac{1+x^2}{1+x^2} = 1 + 2x \cdot atan(x)$.

כלומר יש למצוא את הטור של $f'(x)$ ולבצע אינטגרציה איבר-איבר למציאת f.

- אנחנו נפתור בדרך אחרת:

$$\boxed{(1+x^2) \cdot atan(x)} = (1+x^2) \cdot \left(\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+1} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot x^{2n+3} =$$

נרצה לסכום מקדמים, לכן נשנה את שם האינדקס בטור השני; $\begin{pmatrix} m = n+1 \\ 2m = 2n+2 \end{pmatrix}$;

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{2n+1} + \sum_{m\geq 1} \frac{(-1)^{m+1} \cdot x^{2m+1}}{2m-1} = \underbrace{\frac{(-1)^0 \cdot x^{2\cdot 0+1}}{2\cdot 0+1}}_{n=0} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} x^{2n+1} \cdot (-1)^n \cdot \left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right]}_{\text{סכימת שני הטורים, שינינו בחזרה את השם של m ל-n.}} =$$

$$= x + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot x^{2n+1} \cdot \frac{-2}{4n^2-1} = \boxed{x + \sum_{n\geq 1} \frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cdot x^{2n+1}}, \quad \boxed{R = 1}$$

(c) $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \cdot dt$ $\qquad f'(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{(2m+1)!}$

אינטגרציה איבר-איבר של $\frac{(-1)^m \cdot x^{2m}}{(2m+1)!}$ תיתן לנו את $\frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot \frac{x^{2m+1}}{2m+1}$,

שהם איברי הטור של $f(x)$. (שימו לב; f' זוגית $\Leftarrow$ f אי-זוגית. הגרירה "$\Leftarrow$" נכונה כי $f(0)=0$).

כלומר $f(0)=0$ לכן המקדם של x^0 הוא אפס. בסה"כ:

$$\boxed{f(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \cdot \frac{x^{2m+1}}{2m+1}}, \quad \boxed{R = \infty}$$

$\rightarrow$ לפי מ. שידוע לנו על sin

$\rightarrow$ או לפי $R = \lim_{m\to\infty} \sqrt[2m]{(2m)!(2m+1)^2}$

(2)(a) $$f(x)=\frac{x}{(1-x)\cdot(1-x^2)}=\frac{x}{(1-x)^2\cdot(1+x)}$$

יש כמה דרכים לפתור את השאלה. בגדול, הן מתחלקות לשתיים:

(א) - להסתכל על $f(x)$ כמכפלה של 2 פונקציות; נניח $\frac{1}{1+x}$ ו-$\frac{1}{(1-x)^2}$, שעבורן יש לנו קל לחשב את טור החזקות. (או $\frac{x}{1-x^2}$, שזו נגזרת של טור ידוע/קל, ו-$\frac{1}{1-x}$). בכל מקרה, בהינתן שני טורים, אפשר להשתמש במכפלת קושי ולחשב את המקדמים של טור החזקות שמתאים ל-f. בסוף החישוב הזה נצטרך למצוא נוסחה סגורה לביטוי מהצורה $C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k}$, (סגורה $\Leftarrow$ לא בתור סכום). זה יכול להיות קל או קשה, אז ננסה לא להגיע לשם.

(ב) - נסתכל על $f(x)$ כסכום של 2 (או יותר) פונקציות. אז המקדמים של f יינתנו ע"י חיבור של המקדמים של 2 (או יותר) הפונקציות שפירקנו. נעשה את זה:

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)^2\cdot(1+x)}=\frac{A}{1+x}+\frac{B}{1-x}+\frac{C}{(1-x)^2}=\frac{A\cdot(1-x)^2+B\cdot(1-x^2)+C\cdot(1+x)}{(1+x)(1-x)^2}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\underline{x^0}: & 0=A+B+C\\ \underline{x^1}: & 1=-2A+C\\ \underline{x^2}: & 0=A-B\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{A=B}\Rightarrow\boxed{C=-2A}\Rightarrow\boxed{1=2C}\Rightarrow\boxed{C=\frac{1}{2},\ A=B=-\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow\boxed{f(x)=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}}$$

את $\frac{1}{(1-x)^2}$ אפשר לחשב כנגזרת ~~[illegible]~~ של $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$, אבל עדיף שנתרגל פעם אחת מציאת מקדמים דרך מכפלת קושי;

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\left(\frac{1}{1-x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)$$

כלומר עבור $a_n=b_n=1$, נחשב את המקדמים של טור המכפלה;

$$\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cdot x^n\quad;\quad C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}1=n+1\Rightarrow\boxed{\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot x^n}$$

שני הטורים האחרים ״נתנו״ ע״י:

$$\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}(-1)^n\cdot x^n+\sum_{n\geq 0}x^n=\sum_{n\geq 0}x^n\cdot\left[1+(-1)^n\right]$$

מתאפס כש-n אי״ז
ושווה 2 כש-n זוגי

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}=\sum_{n\geq 0}2\cdot x^{2n}}$$

חיבור של שלושת המחוברים האחרונים נותן לנו;

$$f(x)=\sum_{n\geq 0}a_n\cdot x^n \quad ; \quad a_{2n}=\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{4}\cdot 2=\frac{2n+1-1}{2}=n=\left\lceil\frac{2n}{2}\right\rceil$$

$$a_{2n+1}=\frac{2n+2}{2}=n+1=\left\lceil\frac{2n+1}{2}\right\rceil$$

ערך שלם עליון

לכן;

$$(R=1) \quad \boxed{f(x)=\sum_{n\geq 0}\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\cdot x^n}$$

2e $f(x)=\sin^3 x$

שלב, אפשר לקחת מכפלה של $\sin x$ בעצמו (3 פעמים), ולנסות למצוא נוסחה ל- $C_n=\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot a_{n-k}$, כאשר a_k הם מקדמי הטור ל-$\sin x$.
ואח״כ ל- $\left(d_n=\sum_{k=0}^{n}c_k\cdot a_{n-k}\right)$. נעשה דרך אחרת (פחות טריוויאלי, כמו ברמז).

- נתרגל גם את מציאת הנוסחה;

(זו הנקודה שקושרת בין $\sin x$, $\cos x$ ל-$\sin 3x$, $\cos 3x$)

$$\cos(3x)+i\cdot\sin(3x)=e^{i\cdot 3x}=\left(e^{ix}\right)^3=(\cos x+i\cdot\sin x)^3=\cos^3 x+3\cdot\cos^2 x\cdot i\cdot\sin x$$
$$+3\cdot\cos x\cdot(i\sin x)^2+(i\cdot\sin x)^3$$

נשווה חלק מדומה (ואפשר גם ממשי ולקבל עוד זהות);

$$\sin(3x)=3\cdot\cos^2 x\cdot\sin x-\sin^3 x$$

אבל נשארנו עם מכפלה שם בגורם האמצעי. ביום-יום זה לא מפריע אבל רצינו להימנע ממכפלת קושי. נציב $\cos^2 x=1-\sin^2 x$;

$$\sin(3x)=3\cdot\sin x-3\sin^3 x-\sin^3 x=3\sin x-4\cdot\sin^3 x$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^3 x=\frac{3}{4}\cdot\sin x-\frac{1}{4}\cdot\sin(3x)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin^3 x} = \frac{3}{4}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{1}{4}\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cdot (3x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\left[\frac{3}{4}-\frac{3^{2n+1}}{4}\right]$$

$$= \boxed{\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{3}{4}\cdot\left[1-3^{2n}\right]\cdot x^{2n+1}} \qquad (R=\infty).$$

---

3 a

$$f(x)=\sum_{k\geq 0} a_k\cdot x^k \xRightarrow{\text{(מתכנס בכל } \mathbb{R}\text{)}} f'(x)=\sum_{k\geq 1} a_k\cdot k\cdot x^{k-1} \xRightarrow{\text{(מתכנס בכל } \mathbb{R}\text{)}} f''(x)=\sum_{k\geq 2} a_k\cdot k(k-1)\cdot x^{k-2}$$

$$=\sum_{k\geq 0} a_{k+2}(k+2)(k+1)\cdot x^k$$

כיוון שנתון כי $f(x)=f''(x)$ לכל x, נשווה מקדמים. לכל $k\geq 0$ מתקיים:

$$\boxed{a_k = a_{k+2}\cdot(k+2)\cdot(k+1)}$$

שימו לב שזו נוסחת רקורסיה למקדמים הזוגיים בנפרד ולמקדמים האי-זוגיים בנפרד.

למזלנו, קיבלנו 2 תנאי התחלה. $f(0)=a_0$, $f'(0)=a_1$

לכן התנאים הם: $\underline{a_0=0}$ (מכאן באינדוקציה כל הזוגיים מתאפסים; $\forall k\geq 0\ a_{2k}=0$).

$\underline{a_1=1}$ (מכאן באינדוקציה, לכל $k\geq 0$; $a_{2k+1}=\frac{1}{(2k+1)!}$).

$$\Longrightarrow \boxed{f(x)=\sum_{k\geq 0}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}} \quad \left(\xLeftrightarrow{\text{חלק אי"ז של } \sum\frac{x^n}{n!}}\right) \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\equiv \sinh(x)}$$

לוגית, סדר הדברים היה כזה; הנחנו שקיימת f שמקיימת את התנאים הנ"ל, כולל הדרישה שרדיוס ההתכנסות שלה הוא ∞, ואז מצאנו נוסחה למקדמי הטור. יש לבדוק שאכן מקדמים אלו מקיימים $\lim\sqrt[n]{|a_n|}=0$, אחרת המסקנה היא שהגענו לסתירה; כלומר שלא קיימת f כזו. כאן התנאי אכן מתקיים ולכן מה שמוקף במלבן זו התשובה הנכונה.

---

3 b $\quad f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k \cdot X^k \xrightarrow{\text{כמו קודם}} f''(x) = \sum_{k\geq 0} a_{k+2}\cdot(k+2)(k+1)\cdot X^k$

מתקבלת נוסחת הרקורסיה; $\boxed{a_{k+2} = \frac{-a_k}{(k+1)\cdot(k+2)}}$,

עם שני תנאי ההתחלה. $a_0 = a_1 = 1$. הבית חונות נתנים, שב, באינדוקציה:

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!}, \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \xrightarrow{\text{נכון, אבל לא כדאי}} \boxed{a_n = \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!}}$$

אפשר לכתוב זאת כך, וזה נכון, אבל אפשר לשים לב שהחלק הזוגי והאי-זוגי הם, לא אחר מאשר, טורים מוכרים לנו; $\sin x = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\cdot X^{2k+1}$, $\cos x = \sum \frac{(-1)^k \cdot X^{2k}}{(2k)!}$.

לכן $\boxed{f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!} \cdot X^n = \cos x + \sin x}$. (והוא אכן ושלו, יש לבדוק שרדיוס ההתכנסות $R = \infty$, וזה באמת נכון).

---

4. סדרת פיבונאצ'י מוגדרת ע"י התנאים $a_0 = a_1 = 1$, $\forall n\geq 0.\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot X^n = \sum_{n\geq 0} (a_{n+2} - a_{n+1})\cdot X^n = \sum_{n\geq 0} a_{n+2}\cdot X^n - \sum_{n\geq 0} a_{n+1}\cdot X^n =$$

$$= X^{-2}\cdot \sum_{n\geq 0} a_{n+2}\cdot X^{n+2} - X^{-1}\cdot \sum_{n\geq 0} a_{n+1}\cdot X^{n+1} = X^{-2}\cdot \sum_{n\geq 2} a_n\cdot X^n - X^{-1}\cdot \sum_{n\geq 1} a_n \cdot X^n$$

$$= X^{-2}\cdot\left(f(x) - a_1\cdot X - a_0\right) - X^{-1}\cdot\left(f(x) - a_0\right) = X^{-2}\cdot f(x) - X^{-1}\cdot f(x) - \cancel{\frac{1}{X}} - \frac{1}{X^2} + \cancel{\frac{1}{X}}$$

$$\Rightarrow f(x)\cdot\left[1 + \frac{1}{X} - \frac{1}{X^2}\right] = -\frac{1}{X^2} \xrightarrow{/\cdot(x^2)} \boxed{f(x) = \left[1 - X - X^2\right]^{-1}} \rightarrow \text{.נגדרש}$$

פירוק לשברים חלקיים; יש למצוא שורשים (אם ישנם) ל- $X^2 + X - 1$;

$$X_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \qquad X_- = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \equiv -\phi$$

$\phi = -X_-$ הוא מספר מוכר, לפעמים נקרא יחס הזהב. שימו לב שמתקיים:

$$X_+ \cdot X_- = \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot(\sqrt{5}+1)\cdot(\sqrt{5}-1) = -\frac{1}{4}\cdot 4 = -1 \Rightarrow X_+ = \frac{-1}{X_-} = \frac{-1}{-\phi} = \phi^{-1}$$

לכן; $\boxed{X^2 + X - 1 = (X+\phi)\cdot(X - \phi^{-1})}$ (ϕ הוא המספר הגדול מבין השניים שמקיימים: $x^2 = x+1$)

עכשיו אפשר לפרק לשברים חלקיים:

$$f_{(x)}=\frac{-1}{x^2+x-1}=\frac{A}{x+\phi}+\frac{B}{x-\phi^{-1}}=\frac{A\cdot(x-\phi^{-1})+B\cdot(x+\phi)}{x^2+x-1}$$

$$\left.\begin{aligned}\underline{x^0:}\quad & -1=-A\cdot\phi^{-1}+B\cdot\phi\\ \underline{x^1:}\quad & 0=A+B\end{aligned}\right\}\Rightarrow B=-A \nearrow -1=-A\phi^{-1}-A\cdot\phi\Rightarrow -1=-A\cdot(\phi^{-1}+\phi)$$

$$/\cdot(-\phi)\Rightarrow \phi=A\cdot(1+\phi^2)\Rightarrow A=\frac{\phi}{\phi^2+1}=\frac{\phi}{\phi+1+1}=\frac{\phi}{\phi+2}\quad,\quad B=-\frac{\phi}{\phi+2}$$

$$\Longrightarrow f_{(x)}=\frac{\phi}{\phi+2}\cdot\left[\frac{1}{x+\phi}-\frac{1}{x-\phi^{-1}}\right]=\frac{\phi}{\phi+2}\cdot\left[\frac{\phi^{-1}}{1+(\frac{x}{\phi})}+\frac{\phi}{1-(\phi x)}\right]=$$

(ברדיוס ההתכנסות המינימלי, כלומר $R=\phi^{-1}$)

$$=\frac{1}{\phi+2}\cdot\left[\sum_{n\ge0}\left(\frac{-x}{\phi}\right)^n+\phi^2\cdot\sum_{n\ge0}(\phi x)^n\right]=\sum_{n\ge0}a_n\cdot x^n$$

$$\boxed{a_n=\frac{(-\phi^{-1})^n+\phi^2\cdot\phi^n}{\phi+2}}\longrightarrow$$ אפשר לפשט עוד אבל זה מספיק לא...

השוואת מקדמים $\Leftarrow$

5

$$\boxed{R_{n}(x)=\frac{1}{n!}\cdot\int_0^x(x-u)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}_{(u)}\,du}$$

טוב, צריך להשתמש ברמז.

הלמה שאנחנו צריכים להוכיח היא שלכל $0\le x$, $R_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$. אז יהי $x>0$.

(נתון לנו ש- $f^{(n+1)}_{(u)}\ge0$ לכל $0\le u$, כלומר שהאינטגרנד למעלה הוא חיובי). נקבע

איזשהו $x<y$, מתקיים: ($\underline{\underline{0<x<y}}\Leftrightarrow 0<\frac{u}{y}<\frac{u}{x}$ לכל $0<u$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{-\frac{u}{x}<-\frac{u}{y}<0}}$ לכל $0<u$)

(הגבלנו את הקטע, הכל חיובי $0\le$)

$$\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^x\left(\frac{x-u}{x}\right)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}_{(u)}\,du\le\frac{1}{n!}\int_0^y\left(1-\frac{u}{x}\right)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}_{(u)}\,du\le$$

$\leftarrow$ ($(1-\frac{u}{x})^{n+1}\le(1-\frac{u}{y})^{n+1}$ ואפשר להכפיל את אגפים בגודל האי-שלילי $f^{(n+1)}_{(u)}$)

$$\le\frac{1}{n!}\int_0^y\left(1-\frac{u}{y}\right)^{n+1}\cdot f^{(n+1)}_{(u)}\,du=\frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

כלומר $\boxed{R_n(x)\le\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}\cdot R_n(y)}$. כעת נשים לב שלכל n, $\boxed{f(y)=T_n(y)+R_n(y)\ge R_n(y)}$

כאשר $T_n(y)$ הוא פולינום טיילור מסדר n של f בנקודה y, וניוון שהנגזרות באפס הן אי-שליליות

אז $0\le T_n(y)$. בסה"כ;

$$0\le R_n(x)\le\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}\cdot R_n(y)\le\left(\frac{x}{y}\right)^{n+1}\cdot f(y)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

הראינו מסנדוויץ' $R_n(x)\to 0$ ולכן סיימנו.

<u>הערה:</u>

הנחנו (לכל n) $f^{(n)}\geq 0$ על $\mathbb{R}^+$, וקיבלנו ש- $R_n \xrightarrow{(\text{נקודתית})} 0$ על $\mathbb{R}^+$.

האם יכול להיות שבאופן כללי נקבל התכנסות נקודתית של R_n לאפס בכל $\mathbb{R}$?

יש דוגמאות כאלה (למשל $f=e^x$, $f=0$), אבל זה לא נכון באופן כללי.

למשל, חשבו על $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & ; x<0 \\ 0 & ; 0\le x \end{cases}$. f גזירה אינסוף פעמים (על כל הישר) אך היא אינה אנליטית ($f(x)\not\leftrightarrow T_n(x)$). ניתן לראות זאת כי $f^{(n)}(0)=0$ לכל n, לכן טור טיילור שלה הוא פשוט פונקציית האפס. ($\forall n,x.\ T_n(x)=0$).

ולמעשה: $R_n(x)=f(x)\neq 0$. $\forall n, x<0$.

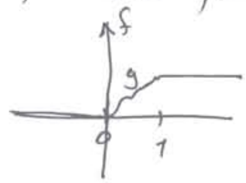
<u>תת-הערה 1:</u>

העובדה ש- $f^{(n)}(0)=0$ היא לא מאוד קשה להוכחה, אך לא מיידית.

<u>תת-הערה 2:</u>

הסיבה שהצלחנו "להעביר" את $f\equiv 0$ ב-$\mathbb{R}^+$ (שהיא פונקציה "טובה") ל- $f=e^{-1/x^2}$ ב-$\mathbb{R}^-$ (שהיא פונקציה "רעה") היא שתנאי $f\in C^\infty$ הוא לא חזק כמו שהוא נראה. אפשר "להדביק" טלאים של פונקציות שאין ביניהן קשר בצורה חלקה - ∞-פעמים; למשל קיימת $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ כך שהפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הניתנת ע"י:

$$f(x)=\begin{cases} 0 ; & x\le 0 \\ g(x) ; & 0\le x\le 1 \\ 1 ; & 1\le x \end{cases}$$



היא $C^\infty(\mathbb{R})$ (גזירה ∞ פעמים).

---

(6) (a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=?$

לכל $|x|<2$ מתקיים:
$$\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{2^n}=\sum_{n\ge 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

נגזור ונציב $x=1$ (בטור ובפונקציה בצורתה הישירה);

$$\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)'\Bigg|_{x=1} = \frac{\frac{1}{2}}{(1-\frac{x}{2})^2}\Bigg|_{x=1} = \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{1}{2})^2} = 2$$

$$\left(\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)'\Bigg|_{x=1} = \left(\sum_{n\geq 1}\frac{nx^{n-1}}{2^n}\right)\Bigg|_{x=1} = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{n}{2^n} = 2}$$

---

6 b

ביטוי כזה, מהצורה $\frac{n^2}{3^n}$, מתאים לגזירה פעמיים, אבל הוא לא נוצר ע"י גזירה פעמיים. (שם יופיע רק: $n(n-1)$). לכן נכתוב זאת בתור:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{3^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)}{3^n} + \sum_{n\geq 1}\frac{n}{3^n} = S_2 + S_1$$

כמו קודם, לכל $|x|<3$ (בפרט $x=1$) מתקיים:

$$\sum_{n\geq 0}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} \xRightarrow{\text{גזירה א-א}} \boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{n\cdot x^{n-1}}{3^n} = \frac{1/3}{(1-\frac{x}{3})^2}} \to (\text{מתאים ל-}S_1)$$

$$\xRightarrow{\text{גזירה א-א נוספת}} \boxed{\sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)\cdot x^{n-2}}{3^n} = \frac{2\cdot(1/3)^2}{(1-\frac{x}{3})^3}} \to (\text{מתאים ל-}S_2)$$

נציב בטור הנגזרת הראשונה $x=1$ (בתוך הרדיוס):

$$S_1 = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{3^n} = \frac{1/3}{(2/3)^2}$$

נציב בטור הנגזרת השנייה $x=1$:

$$S_2 = \sum_{n\geq 1}\frac{n(n-1)}{3^n} = \sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)}{3^n} = \left(\sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)\cdot x^{n-2}}{3^n}\right)\Bigg|_{x=1} = \frac{2\cdot(1/3)^2}{(1-x/3)^3}\Bigg|_{x=1} = \frac{2\cdot(1/3)^2}{(2/3)^3}$$

בסה"כ:

$$\boxed{\sum_{n\geq 1}\frac{n^2}{3^n}} = S_1 + S_2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

---

6 c

כמו קודם; $\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$. הפעם נעשה אינטגרציה (א-א):

$$\sum_{n\geq 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^n} = (-3)\cdot\ln\left|1-\frac{x}{3}\right| \longrightarrow$$

שימו לב שבאינטגרציה המקדם של x^0 לא נקבע "אוטומטית", וצריך לוודא שיוון בין שני האגפים עבור $x=0$. אכן $0=-3\cdot\ln(1)$, ובטור שלנו אין מקדם של x^0.

$$-3\cdot\ln\left|1-\frac{x}{3}\right| = \sum_{n\ge 0}\frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^n} = \sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n\cdot 3^{n-1}} = x\cdot\sum_{n\ge 1}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{n-1}}$$

כאשר הצעד האחרון (הוצאת x מהטור) נעשה כדי לוודא שנקבל n^2 במכנה אחרי האינטגרציה הבאה, ולא $n\cdot(n+1)$. לכן עד כה ראינו שוויון בין 2 הפונקציות הבאות, לכל $|x|<3$, ובפרט לכל $x\in[0,1]$:

$$-3\cdot\frac{\ln|1-\frac{x}{3}|}{x} = \sum_{n\ge 1}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{n-1}}$$

לכן אפשר לעשות אינטגרציה, ועבור הטור נעשה אינטגרציה אבר-אבר, כמובן:

(ניוטון-לייבניץ עבור הטור והקדומה שלו)

$$\int_0^1 -3\cdot\frac{\ln|1-\frac{x}{3}|}{x}\,dx = \int_0^1\sum_{n\ge 1}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{n-1}}\cdot dx = \left(\int\sum_{n\ge 1}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{n-1}}\right)\Bigg|_{x=1} - \left(\int\sum_{n\ge 1}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{n-1}}\right)\Bigg|_{x=0} =$$

חישוב קדומה של הטור דרך אינטגרציה אבר-אבר

$$= \left(\sum_{n\ge 1}\int\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^{n-1}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \left(\sum_{n\ge 1}\frac{x^n}{n^2\cdot 3^{n-1}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2\cdot 3^{n-1}} - 0$$

נחלק ב-3 ונקבל:

$$\boxed{\sum_{n\ge 1}\frac{1}{n^2\cdot 3^n} = \int_0^1\frac{-\ln|1-\frac{x}{3}|}{x}\cdot dx}$$

---

7) הרעיון הוא לחשוב על הפונקציות f,g שמקיימות $f(x)=\sum_{n\ge 0}a_n x^n$ ו- $g(x)=\sum_{n\ge 0}b_n\cdot x^n$ ועל מכפלתן, שטור החזקות שלה הוא $\sum_{n\ge 0}c_n x^n$.

(a) למשל, לפונקציה $\frac{x-1}{x-2}$ יהיה טור עם רדיוס התכנסות ≥ 2, ולפונקציה $\frac{x-2}{x-1}$ יהיה טור עם רדיוס ≥ 1. למכפלתן יהיה רדיוס התכנסות אינסופי;

$$\frac{x-1}{x-2} = \ldots = 1-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right) = 1-\frac{1}{2}\sum_{n\ge 0}\frac{x^n}{2^n} \implies \boxed{a_n = \begin{cases}1/2 & ;\ n=0\\ -(1/2)^{n+1} & ;\ n\ge 1\end{cases}}$$

$$\frac{x-2}{x-1} = \ldots = 1+\frac{1}{1-x} = 1+\sum_{n\ge 0}x^n \implies \boxed{b_n = \begin{cases}2 & ;\ n=0\\ 1 & ;\ n\ge 1\end{cases}}$$

$$\implies \boxed{C_0} = a_0\cdot b_0 = \frac{1}{2}\cdot 2 = \boxed{1}\quad,\quad \boxed{C_n} \overset{n\ge 1}{=} \sum_{k=0}^{n}a_k\cdot b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1}a_k\cdot b^{n-k} + a_0 b_n + a_n b_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 1 + -\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\cdot 2 + \sum_{k=1}^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\cdot 1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{n-1}-1}{2^n}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1-(1/2)^{n-1}}{1-1/2} = \boxed{0}$$

$\Rightarrow \boxed{c_n = \delta_{n,0}} \Rightarrow \boxed{\sum_{n\geq 0} c_n \cdot x^n} = 1 + \sum_{n\geq 1} 0\cdot x^n = \boxed{1} \rightarrow$ כמצופה

ומתקיים, $R_1 = \left(\limsup |a_n|^{1/n}\right)^{-1} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-1} = 2$, $R_2 = \ldots = 1$

אבל $R = \infty$. $\left(\lim |c_n|^{1/n} \underset{\text{ה.מ.}}{=} \lim(0) = 0\right)$.

(b)

כיון $f(x) \equiv 1$, $g(x) = \frac{1}{1-x}$, ויתן $a_n = \delta_{n,0}$, $b_n \equiv 1$,

ולכן $c_n \equiv 1$, ולכן $R_1 = \infty$, $R_2 = 1$, $R = 1 = \min\{1, \infty\}$.

(c)

נסמן $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}$.

מתקיים (בדקו) $R_1 = 1$, $R_2 = 2$, ועבור R , שמתקיים

ולכן ש $(f\cdot g)(x) = \frac{1}{x-3}$, מתקיים $R = 3$, ולכן $\max\{1,2\} < 3 < \infty$.

---

(8)

<u>טענה:</u>

אם $\sum_{n\geq 0} a_n$ מתכנס לפי צ'זרו, אזי $\frac{a_n}{n} \longrightarrow 0$.

<u>הוכחה</u>

תחת הסימון $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, מתקיים:

$\sum_{n\geq 1} a_n$ מתכנס-צ'זרו $\iff$ $b_n := \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} S_k\right)$ סדרה מתכנסת.

לכן $\exists \lim_{n\to\infty} b_n$ ונסמנו ב- L .

<u>נשים לב:</u> $(n+1)\cdot b_{n+1} - n\cdot b_n = \sum_{k=1}^{n+1} S_k - \sum_{k=1}^{n} S_k = S_{n+1}$

בדומה: $n\cdot b_n - (n-1)\cdot b_{n-1} = \ldots\ldots = S_n$

נחסר: $(n+1)\cdot b_{n+1} - 2n\cdot b_n + (n-1)\cdot b_{n-1} = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$.

נחלק ב- $(n+1)$:

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = b_{n+1} - 2\left(\frac{n}{n+1}\right)\cdot b_n + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot b_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} L - 2\cdot 1\cdot L + 1\cdot L = 0.$$

כנדרש. לכן נרצה למצוא טור עם סכום גבול סופי, אך שמתקיים

$\frac{a_n}{n} \not\to 0$.

נתבונן בסדרה $\boxed{a_n=(-1)^n\cdot n}$. ולכן, $\frac{a_n}{n}=(-1)^n$ לא סדרה מתכנסת. אבל:

$$\boxed{\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)}=\lim_{x\to1^-}\left(\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot(-x)^n\right)=\lim_{x\to1^-}\left[-x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n(-x)^{n-1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to1^-}\left[-x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot(-x)^{n}\right]=\lim_{x\to1^-}\left[\left(y\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot y^n\right)_{y=-x}\right]=$$

$$=\lim_{y\to-1^+}\left[y\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(y^{n+1})'\right]=\lim_{y\to-1^+}\left[y\left(\sum_{n=0}^{\infty}y^n\right)'\right]=$$

$$=\lim_{y\to-1^+}\left[y\cdot\left(\frac{1}{1-y}\right)'\right]=\lim_{y\to-1^+}\left[\frac{y}{(1-y)^2}\right]=\frac{-1}{2^2}=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

▨

⊛ הערה:

$$\{a_n\}_{n\ge1}=\{-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ -5,\ 6,\ -7,\ 8,\ \ldots\}$$

$$\{S_n\}_{n\ge1}=\{-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4,\ \ldots\}$$

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}S_k\right\}_{n\ge1}=\{-1,\ 0,\ -2,\ 0,\ -3,\ 0,\ -4,\ 0,\ \ldots\}$$

$$\left\{b_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k\right\}_{n\ge1}=\left\{-1,\ 0,\ -\frac{2}{3},\ 0,\ -\frac{3}{5},\ 0,\ -\frac{4}{7},\ 0,\ \ldots\right\}$$

כלומר, האיברים הזוגיים $\boxed{b_{2n}=0}$ מתאפסים והאיברים האי-זוגיים מקיימים:

$$\boxed{b_{2n+1}=-\frac{n}{2n+1}\longrightarrow-\frac{1}{2}}.$$

בעוד ש- $\{b_n\}$ לא סדרה מתכנסת (ואכן דוגמא זו לגבה לנו - כפי שראינו (אבל כן, בצ'זרו לא)), יש לה ממוצע צ'זרו שכן מתכנס;

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}b_k}\longrightarrow\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{2}\right)=\boxed{-\frac{1}{4}}$$

והוא מתכנס לסכום אבל של הטור המקורי $\sum_{n\ge1}a_n$.

סמסטר ב', תשע"א

<u>חדו"א 2 - תרגיל מס' 9</u>

1. (א) מצאו את כל הפתרונות המרוכבים למשוואות: $z^3=-1$, $z^4=16i$. ציירו במישור המרוכב את הפתרונות המתקבלים.

   (ב) קבעו האם הסדרות הבאות מתכנסות: $\frac{i^n}{n}$, $(-i)^n+\frac{n}{n+i}$.

2. (א) הוכיחו שלכל מספר מרוכב $z\neq 1$ מתקיים:

$$\sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$$

   (ב) חשבו את הסכום $\sum_{n=0}^{N} e^{i\theta n}$ עבור $\theta\in\mathbb{R}$. מצאו בעזרתו נוסחה סגורה ל- $\sum_{n=0}^{N}\cos(n\theta)$.

3. (א) הוכח שאם $\{z_n\},\{w_n\}$ שתי סדרות מתכנסות של מספרים מרוכבים, אז גם $\{z_n+w_n\}$ מתכנסת.

   (ב) הגדירו סדרת קושי עבור סדרה של מספרים מרוכבים. הוכיחו שסדרת מספרים מרוכבים מתכנסת אם ורק אם היא סדרת קושי. הסיקו שהתכנסות בהחלט של טור מרוכב ($\sum_n |z_n|<\infty$) גוררת התכנסות רגילה של הטור ($\sum_n z_n<\infty$), גם במרוכבים.

4. תהיינה $f,g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ אינטגרביליות רימן. נגדיר מכפלה פנימית בין f ל-g ע"י: $\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$. חשבו:

   (א) $\langle t^2+it^3, t\rangle$.

   (ב) $\langle e^{int}, e^{imt}\rangle$, כאשר $n,m\in\mathbb{Z}$.

   (ג) $\langle t, e^{int}\rangle$, $n\in\mathbb{Z}$.

5. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ פונקציה 2π-מחזורית, אינטגרבילית רימן על $[0,2\pi]$. כזכור, מסמנים $\hat{f}(n)=(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$, מקדם פורייה ה- n של f.

   (א) הוכיחו כי $\widehat{(f+g)}(n)=\widehat{f}(n)+\widehat{g}(n)$ לכל $n\in\mathbb{Z}$.

   (ב) נניח ש- f פונקציה ממשית. אזי $\widehat{f}(-n)=\overline{\widehat{f}(n)}$.

(ג) עבור $a \in \mathbb{R}$ נסמן $f_a(t) = f(t+a)$. הראו ש־ $\widehat{f_a}(n) = e^{ina}\hat{f}(n)$.

6. תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π־מחזורית, אינט' ב $[0, 2\pi]$. כרגיל, $\widehat{f}(n)$ הוא מקדם פורייה ה־n של f.

(א) נתון ש־ f גזירה אינסוף פעמים. הוכיחו שלכל $p > 0$, מתקיים $\widehat{f}(n) = o(n^{-p})$. כלומר, $\lim_{n\to\pm\infty} n^p \widehat{f}(n) = 0$ לכל $p > 0$.

(ב) נניח ש־ f גזירה, וש־ f' אינטגרבילית ב־ $[0, 2\pi]$. ודאו ש־ $\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n)$.

7. תהיינה $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ פונקציות 2π־מחזורית, אינטגרביליות רימן על $[0, 2\pi]$. נסמן $S_N f(t) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)e^{int}$.

(א) נניח ש־ $f \equiv 0$ בסביבה של נקודה $x_0 \in \mathbb{R}$. השתמשו במשפט שהוכח בכיתה והסיקו ש־ $S_n f(x_0) \to 0$ כאשר $n \to \infty$.

(ב) נניח ש־ $f \equiv g$ בסביבה של $x_0 \in \mathbb{R}$. הוכיחו את תכונת הלוקאליזציה של התכנסות טור פורייה: $S_n f(x_0) \to f(x_0)$ אם ורק אם $S_n g(x_0) \to g(x_0)$.

8. כזכור, f היא פונקציית ליפשיץ בקטע $[a, b]$ אם קיים $K > 0$ כך שלכל שתי נקודות $x, y \in [a, b]$ מתקיים $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|$. נסמן $f \in \text{Lip}[a, b]$.

(א) נתון ש־ $f \in \text{Lip}[a, b]$ וגם $f \in \text{Lip}[b, c]$. הוכיחו כי $f \in \text{Lip}[a, c]$.

(ב) תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a, b]$, וגזירה ב־ (a, b) פרט לנקודה אחת $c \in (a, b)$. נניח שקיים $M > 0$ כך ש־ $|f'(x)| < M$ לכל $x \in (a, b)$ שבו הפונקציה גזירה. הוכיחו ש־ $f \in \text{Lip}[a, b]$.

9. חשבו את פיתוח פורייה של הפונקציות ה־ 2π־מחזוריות הבאות. האם ההתכנסות היא נקודתית?

(א) הפונקציה האי־זוגית שמקיימת $f(x) = x(\pi - x)$ ב $[0, \pi]$, עבור $x \in [-\pi, \pi)$.

(ב) $f(x) = \text{sgn}(x)$ עבור $x \in [-\pi, \pi)$.

(ג) $f(x) = \chi_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$ עבור $x \in [-\pi, \pi)$

חדו"א 2 - פתרונות נבחרים לתרגיל מס' 9

1. (א) נכתוב בצורה קוטבית את המשוואות. נניח $z = re^{i\theta}$ כש- $r \geq 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$. המשוואה הראשונה: $r^3 e^{i3\theta} = 1 \cdot e^{i\pi}$. אם שני מספרים בהצגה קוטבית זהים, אז הרדיוס זהה והזווית זהה עד כדי הוספת כפולות של 2π. לכן: $r^3 = 1 \Leftarrow r = 1$ (כי $r > 0$!), $3\theta = \pi + 2\pi k$. לכן יש שלושה פתרונות $z_k = e^{i(\frac{\pi + 2\pi k}{3})},\ k = 0, 1, 2$. ניתן לחשב את הביטויים עם קצת טריגונומטריה.

   המשוואה השניה היא (שוב, בצורה קוטבית): $r^4 e^{i4\theta} = 16 e^{i\pi/2}$, לכן $r = 2$, $\theta_k = \frac{\pi/2 + 2\pi k}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k = 0, 1, 2, 3$. הפתרונות הם $2e^{i\theta_k},\ k = 0, 1, 2, 3$.

   (ב) הסדרה הראשונה מתכנסת לאפס לפי הגדרה, כיוון שבערך מוחלט $|\frac{i^n}{n} - 0| = \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. הסדרה השניה היא סכום של שתי סדרות: האחת מתכנסת $\frac{n}{n+i} = \frac{1}{1+i/n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ (כמו הסדרה שזה עתה עשינו, $\frac{i}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). השניה $(-i)^n$ אינה מתכנסת, כי יש לה 4 גבולות חלקיים שונים (כתלות בערכו של n מודולו 4, נוכל לקבל כל אחד מהערכים $1, -i, -1, i$). בסך הכל נקבל שלסכום יש 4 גבולות חלקיים שונים, לכן אין התכנסות.

2. (א) ע"י פתיחת סוגריים ניתן לבדוק ש- $(1 - z)(1 + z + \cdots + z^N) = 1 - z^{N+1}$. כיוון ש- $1 - z \neq 0$, ניתן לחלק בו (כמספר מרוכב), ולקבל את הזהות הנדרשת.

   (ב) כיוון שהפונקציות מחזוריות-2π די לנתח את ההתנהגות עבור $\theta \in [0, 2\pi)$. אם $\theta = 0$ הסכום הוא $\sum_{n=0}^{N} 1 = N + 1$. אחרת, $z = e^{i\theta} \neq 1$ וניתן להשתמש בנוסחה מהסעיף הקודם: $\sum_{n=0}^{N} e^{in\theta} = \frac{1 - e^{i(N+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}}$. אם נקח חלק ממשי של הסכום הנ"ל נקבל:

$$1 + \cos(\theta) + \ldots \cos(N\theta) = \mathrm{Re}\frac{(1 - e^{i(N+1)\theta})(1 - e^{-i\theta})}{|1 - e^{i\theta}|^2} =$$

$$\frac{1 - e^{-\theta} - e^{i(N+1)\theta} + e^{iN\theta}}{(1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{1 - \cos\theta - \cos(N+1)\theta + \cos N\theta}{2 - 2\cos\theta} =$$

$$1 - \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2} \cdot \theta\right)\sin\frac{\theta}{2}}{1 - \cos\theta} = 1 - \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

3. (א) מהנתון, קיימים מספרים מרוכבים z, w כך ש- $|z_n - z| \to 0,\ \ |w_n - w| \to 0|$ כאשר $n \to \infty$. כעת, מאי שוויון המשולש נקבל $|(z_n + w_n) - (z + w)| \leq |z - z_n| + |w_n - w| \to 0 + 0 = 0$, וזה מוכיח ש-$\{z_n + w_n\}$ סדרה מתכנסת (ל- $z + w$).

   (ב) ההגדרה היא בדיוק כמו בממשיים: $\{z_n\}$ סדרת קושי אם לכל $\epsilon > 0$ קיים N טבעי כך שעבור $n, m > N$: $|z_n - z_m| < \epsilon$. לכן התכונות המבוקשות עוברות אוטומטית למרוכבים (להעתיק את ההוכחות שנעשו עבור ממשיים ולאות שאין שינוי).

4. נניח שכל השאלה הוגדרה בקטע $[-\pi,\pi]$ (גם המכפלה הפנימית כמובן).

(א) $\langle t^2+it^3, t\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(t^2+it^3)tdt = \frac{1}{2\pi}(0+i\frac{t^4}{4}|_{-\pi}^{\pi}) = \frac{i}{4}\pi^3$.

(ב) $\langle e^{imt}, e^{int}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos(mt)+\sin(mt))(\cos(nt)-i\sin(nt))dt = \cdots = \begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases}$.

(ג)

$$\langle t, e^{int}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t(\cos nt - i\sin nt)dt = 0 - \frac{i}{2\pi}\left(-\frac{t\cos nt}{n}|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt\right) =$$
$$\frac{i}{2\pi}\frac{-2\pi(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

5. (א) נובע מלינאריות האינטגרל.

(ב) $\overline{\widehat{f}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{f(t)e^{-int}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)e^{-int}dt = \widehat{f}(-n)$.

(ג) בחישוב הבא נעשה חילוף משתנה $r=t+a$, ונשתמש במחזוריות כדי להחזיר את הגבולות לקטע $[0,2\pi]$.

$$\widehat{f_a}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t+a)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a}f(r)e^{-in(r-a)}dr =$$
$$e^{ina}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-inr}dr = e^{ina}\widehat{f}(n)$$

6. (א) נתסמך על ב': עבור $p>0$ מסויים נבחר $k>p$ טבעי. מהנתון נובע כי f גזירה ברציפות k פעמים. לכן ניתן להשתמש בסעיף ב' k פעמים, ולקבל שלכל $n\neq 0$:

$$\widehat{f}(n) = \frac{\widehat{f'}(n)}{in} = \cdots = \frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{(in)^k}$$

לכן: $\lim_{n\to\pm\infty} n^p\widehat{f}(n) = \lim_{n\to\pm\infty} n^p\cdot\frac{\widehat{f^{(k)}}(n)}{i^k n^k} = i^k\lim_{n\to\pm\infty}\widehat{f^{(k)}}(n)\cdot\frac{1}{n^{k-p}} = i^k\cdot 0\cdot 0 = 0.$ כאשר השתמשנו כאן במשפט רימן־לבג, עבור הפונקציה $f^{(k)}$, כלומר בכך ש־ $\lim_{n\to\pm\infty}\widehat{f^{(k)}}(n)=0$.

(ב) נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f'(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\left(f(t)e^{-int}|_0^{2\pi} + \int f(t)ine^{-int}dt\right) =$$
$$0 + in\cdot\frac{1}{2\pi}\int f(t)e^{-int}dt = in\widehat{f}(n).$$

המחובר הראשון התאפס כיוון שהפונקציה $f(t)e^{-int}$ היא מחזורית־2π.

7. (א) ניתן להשתמש במשפט דיריכלה: ב־ x_0 הפונקציה f היא ליפשיץ מקומית (למעשה, היא גזירה שם, ונגזרתה שווה 0), ולכן יש התכנסות נקודתית לממוצע הגבולות הצדדים, שבמקרה זה הוא $f(x_0) = 0$.

(ב) נשתמש בסעיף א' עבור הפונקציה $h = f - g$. נקבל ש־0 $S_n h(x_0) \to 0$, כאשר $n \to \infty$. אך נזכור שחישוב מקדמי פוריה הוא לינארי, כלומר $\widehat{h}(n) = \widehat{f}(n) - \widehat{g}(n)$ ולכן: $S_n h(x_0) = S_n f(x_0) - S_n g(x_0)$. לכן, אם למשל $S_n f(x_0) \to f(x_0)$, נקבל מסכום סדרות מתכנסות כי־ $S_n g(x_0) = S_n h(x_0) + S_n f(x_0) \to 0 + f(x_0) = g(x_0)$, כנדרש. מובן שצד שני באותה דרך.

8. (א) כיוון ש־ $f \in \mathrm{Lip}[a,b]$, קיים קבוע $K_1 > 0$ כך שלכל $x, y \in [a,b]$ מתקיים $|f(x)-f(y)| \le K_1|x-y|$. בדומה, כיוון ש־$f \in \mathrm{Lip}[a,b]$ קיים קבוע $K_2 > 0$ כך שלכל $x, y \in [b,c]$ מתקיים $|f(x)-f(y)| \le K_2|x-y|$. נגדיר $K = \max\{K_1, K_2\}$. נבדוק שמתקיים תנאי ליפשיץ על כל הקטע $[a,c]$ עם קבוע K: אם נקח $x, y \in [a,b]$ או $x, y \in [b,c]$ אז ברור. נניח בלי הגבלה ש־$x < b < y$. אזי:

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)| \le$$
$$\le K_1(b-x) + K_2(y-b) \le K(b-x+y-b) = K(y-x).$$

(ב) בקטע $[a,c]$ ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים של לגרנז', ולקבל שלכל $x, y \in [a,c]$ קיים $w \in (x,y)$ כך ש: $|f(x)-f(y)| = |f'(w)||x-y| < M|x-y|$. לכן $f \in \mathrm{Lip}[a,c]$. באופן זהה, $f \in \mathrm{Lip}[c,b]$ (אפילו עם אותו קבוע). נקבל מסעיף א' את הדרוש.

9. (א) בחישוב מקדמי פוריה נשתמש בעובדה ש־ f אי זוגית, ולכן האינטגרלים מהצורה $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$ מתאפסים, וכן הפונקציה $f(x)\sin nx$ היא זוגית. מתכונות אלה מיד רואים ש־ $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. נחשב ל־$n \neq 0$ (בחישוב יש פעמיים אינטגרציה בחלקים):

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{i}{\pi}\int_{0}^{\pi} x(\pi-x)\sin nx dx =$$
$$\frac{i}{\pi}\left(-(\pi x - x^2)\frac{\cos nx}{n}|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi (\pi-2x)\cos nx dx\right) = \frac{i}{\pi}\left(0 + (\pi-2x)\frac{\sin nx}{n}|_0^\pi + \frac{2}{n^2}\int_0^\pi \sin nx dx\right) =$$
$$0 - \frac{i}{\pi}\frac{2}{n^3}\cos nx|_0^\pi = -\frac{2i((-1)^n-1)}{\pi n^3}.$$

כלומר אם $n = 2k$ הביטוי מתאפס, ואחרת $n = 2k+1$ ונקבל $\widehat{f}(2k+1) = \frac{4i}{\pi(2k+1)^3}$. מכאן שהפיתוח הוא:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4i}{\pi(2k+1)^3}e^{i(2k+1)x} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\sin(2k+1)x.$$

ההתכנסות היא שוב במ"ש, כי הפונקציה רציפה וגזירה ברציפות למקוטעין.

(ב) בסעיף זה (ובסעיף הבא) מדובר בפונקציות מדרגה, לכן מתקיים תנאי דיריכלה ויש התכנסות נקודתית (בנקודות הקפיצה, ההתכנסות אינה לערך הפונקציה כי אם לממוצע בין הגבולות החד־צדדיים). אין התכנסות במ"ש, כי הפונקציות לא רציפות (כזכור, טור של פונקציות רציפות המתכנס במ"ש־ הגבול גם הוא פונקציה רציפה).

סמסטר ב', תשע"א

חדו"א 2 - תרגיל מס' 10

1. חזרו על שאלה 9 מדף התרגיל הקודם וקבעו אם הטורים מתכנסים במ"ש בכל אחד מן המקרים.
2. השתמשו בפיתוח משאלה 9, סעיף א', דף תרגיל 9 כדי להוכיח ש

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_{odd}} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{960}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה 2π-מחזורית, המוגדרת ע"י:

$$\begin{cases} f(x) = 1+\sin\frac{\pi^2}{x}, & x\in[-\pi,\pi), x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

האם טור פוריה של f מתכנס ב-0? אם כן, מה ערכו בנקודה זו?

4. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ 2π-מחזורית גזירה ברציפות. נתון ש-$\int_0^{2\pi}|f'(t)|^2dt<1$. הוכיחו כי:
   (א) $\sum_{n\neq 0}|\widehat{f}(n)|^2<1$.
   (ב) קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש-$\int_0^{2\pi}|f(t)-c|^2<1$.

5. בכיתה ראינו ש- $\cot(\pi t)-\frac{1}{\pi t}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t}{t^2-n^2}$ לכל t לא שלם.
   (א) הראו שלכל $0\le x<1$ מתקיים

$$\int_0^{\pi x}\left[\cot(t)-\frac{1}{t}\right]dt=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

   האם מדובר באינטגרל לא אמיתי, או באינטגרל רימן רגיל?
   (ב) הסיקו שלכל $0\le x<1$,

$$\sin(x)=\lim_{N\to\infty}x\prod_{n=1}^{N}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right)=x\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2n^2}\right).$$

   הציבו $x=\pi/2$. איך קוראים לנוסחא שקיבלתם?

6. הוכיחו את נוסחת פרסבל לטורי פוריה ממשיים: אם $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ (פונקציה ממשית!), אינטגרבילית, ובעלת הפיתוח $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos(nx)+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\sin(nx)$, אזי מתקיים:

$$.\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt=\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)$$

7. הוכיחו את משפט ויירשטראס, ע"י שימוש במשפט פייר; הוכיחו כי לכל פונקציה רציפה $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ קיימת סדרת פולינומים P_n כך ש $P_n\rightrightarrows f$. **רמז:** ניתן לקרב את e^{inx} ע"י פולינומים.

8. תהי $\{f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{C}\}$ סדרת פונקציות מחזוריות 2π. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ל f אז $||f-f_n||_2\to 0$.

(ב) אם $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית ל f, אז $||f-f_n||_2\to 0$.

(ג) אם $||f-f_n||_2\to 0$ אז $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש ל f.

(ד) אם $||f-f_n||_2\to 0$ אז $\{f_n\}$ מתכנסת נקודתית ל f.

9. תהי f פונקציה מחזורית 2π וגזירה ברציפות ב $[-\pi,\pi]$. תהי g מחזורית 2π ואינטגרבילית רימן ב־ $[-\pi,\pi]$. הוכיחו כי $f*g$ גזירה ברציפות.

10. (א) הוכיחו כי גרעין פואסון מקיים $P_r(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}$

(ב) הוכיחו כי $P_r(x)$ הוא גרעין טוב (כאשר $r\to 1^-$). מה ניתן להסיק מכך?

(ג) הוכיחו כי קונבולוציה של פונקציה $f\in R[0,2\pi]$ עם $P_r(x)$, היא גזירה אינסוף פעמים.

הערה: אמנם הגדרנו גרעין טוב כאשר היה לנו פרמטר דיסקרטי n, אך כאן הכוונה היא שיש לנו פרמטר רציף $0\le r<1$, כלומר יש לקחת את אותה ההגדרה שנתנו, ולהחליף את n ב r ולקחת גבול ל 1 בהתאם.

11. (א) תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ פונקציה רציפה ומחזורית. נגדיר סדרת פונקציות

$$g_n(x)=\pi n\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(x)=\pi n\begin{cases}1, & x\in[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\\ 0, & x\notin[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]\end{cases}$$

הוכיחו כי $f*g_n$ היא פונקציה גזירה ברציפות לכל n וכי $f*g_n$ מתכנסת במ"ש ל f.

(ב) השתמשו בסעיף הקודם כדי לתת הוכחה אלטרנטיבית ללמה של רימן־לבג, עבור פונקציות רציפות ב $R[0,2\pi]$.

12. ★ הוכיחו את משפט ברנשטיין: כל פולינום טריגונומטרי מהצורה $P(t)=\sum_{n=0}^{N} a_n e^{inx}$ מקיים

$$\sup_{x\in[0,2\pi]} |P'(x)| \le N \sup_{x\in[0,2\pi]} |P(x)|$$

<u>הדרכה</u>: הגדירו: $k(t) = N\, e^{iNt}\, F_N$ (הזזה ומתיחה של גרעין פייר). התבוננו בקונבולוציה $k*P$ והעזרו בעובדה כי $\widehat{(k*P)}(n) = \widehat{k}(n)\widehat{P}(n)$: מה הקשר בין $k*P$ ל P' ? מצאו P עבורה יש שיוויון.

חדו"א 2 - פתרונות נבחרים לתרגיל מס' 10

1. ראה פתרון שאלה 9, דף תרגיל 9.

2. (א) נשתמש בשויון פרסבל לטור המרוכב שקיבלנו:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\frac{4i}{\pi(2k+1)^3}\right|^2$$

האינטגרל משמאל שווה ל: $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x^2(\pi-x)^2dx=\cdots=\frac{11}{30}\pi^4$.
הסכום מימין שווה: $\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{32}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}$. ומכאן נקבל

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}.$$

נסמן $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$. מצאנו כבר את הסכום כשעוברים רק על אי־זוגיים. נשים לב שמעבר רק על הזוגיים נותן: $S_{\text{even}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^6}=\frac{1}{2^6}S$. כעת $S=S_{\text{even}}+S_{\text{odd}}=\frac{1}{64}S+\frac{11}{960}\pi^6$.
אזי $S=\frac{64}{63\cdot960}\pi^6=\frac{\pi^6}{945}$.

3. נתבונן בפונקציה $g(x)=f(x)-1=\begin{cases}f(x)=\sin\frac{\pi^2}{x}, & x\in[-\pi,\pi), x\neq 0\\ f(0)=0\end{cases}$. זו פונקציה אינגרבילית על $[-\pi,\pi]$ לכן יש לה טור פוריה. כיוון שהטור זה $g(x)$ אי זוגית, טור פוריה שלה מורכב רק מסינוסים, כלומר: $g(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$. אם נציב $x=0$ בטור נקבל טור של אפסים, ולכן הוא מתכנס לאפס (לא חשוב מהם המקדמים b_n !). מצד שני, $g(0)=0$ ולכן הטור מתכנס לערך של g ב־0. מתכונת לינאריות של טורי פוריה, נקבל שהטור המתאים ל־$f(x)=g(x)+1$ הוא $f(x)\sim 1+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$. מאותם שיקולים רואים שהטור באגף ימין מתכנס ל־$f(x)=1$.

4. (א) נשתמש בתכונה שראינו: $\widehat{f'}(n)=in\widehat{f}(n)$, ונקבל:

$$\sum_{n\neq0}|\widehat{f}(n)|^2=\sum_{n\neq0}\frac{|\widehat{f'(n)}|^2}{|in|^2}<\sum_{n\neq0}|\widehat{f'}(n)|^2\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\widehat{f'(n)}s|^2=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(x)|^2dx<\frac{1}{2\pi}\cdot1.$$

כשבשוויון האחרון השתמשנו בפרסבל עבור f'. למעשה החסם שניתן בתרגיל הוא גס, ניתן היה לדרוש להוכיח ש־ $\frac{1}{2\pi} > \sum_{n\neq 0} |\widehat{f}(n)|^2$.

(ב) נבחר $c = \int_0^{2\pi} f(x)dx$. נקבל כי $g(x) = f(x) - c$ היא בעלת $\int_0^{2\pi} g(x)dx = 0$ ולכן $\widehat{g}(0) = 0$. מצד שני, לכל $n \neq 0$, $\widehat{g}(n) = \widehat{f}(n)$ (חשבו מדוע!). נציב זאת בשוויון פרסבל עבור g:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x) - c|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{g}(n)|^2 = \sum_{n\neq 0} |\widehat{g}(n)|^2 = \sum_{n\neq 0} |\widehat{f}(n)|^2 < 1$$

כאשר אי השוויון האחרון נובע מסעיף א'.

5. (א) ראשית נבחין שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t}{t^2 - n^2}$ מתכנס במ"ש ב־$[0,\pi]$: כל מחובר $u_n(t) = \frac{t}{t^2-n^2}$ הוא פונקציה יורדת ב־t, אזי $|u_n(t)| \leq |u_n(\pi)| = b_n$, והרי חסמנו את טור הפונקציות ע"י טור מספרי מתכנס (ויירשטרס). כעת, ניתן לעשות אינטגרציה מ־0 עד $y < \pi$ איבר איבר בטור (להחליף אינטגרל וסכום). עוד חילוף משתנים $y = \pi x$ תביא לזהות המבוקשת. אם ניקח $x < 1$ אז הנקודה הבעייתית היחידה באינטגרל תהא 0. אך ניתן לבדוק שלמעשה $\lim_{t\to 0}\left(\cot t - \frac{1}{t}\right) = 0$ (ע"י מכנה משותף ושימוש בלופיטל פעמיים). לכן זהו אינטגרל אמיתי.

(ב) נציב $y = \pi x$ ונחשב את האינטגל מסעיף קודם:

$$\int_0^y (\cot t - \frac{1}{t})dt = \log(\sin t) - \log t|_0^y = \log\left(\frac{\sin t}{t}\right)|_0^y = \log\left(\frac{\sin y}{y}\right).$$

נציב זאת במשוואה מסעיף קודם ונפעיל אקספוננט על שני אגפי המשוואה:

$$\frac{\sin y}{y} = e^{\log\left(\frac{\sin y}{y}\right)} = e^{\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1 - \frac{y^2}{\pi^2 n^2}\right)} = \lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

וזו הנוסחה המבוקשת. בהצבת $x = \pi/2$ נקבל את נוסחת Wallis.

6. נזכר בנוסחת פרסבל שלמדנו: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ פיתוח פוריה, אז $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$. כעת נזכר שניתן גם לייצג ע"י $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(nx)$, ואז הקשר בין המקדמים הוא

$$a_0/2 = c_0, \;\; a_n = c_n + c_{-n}, \;\; b_n = i(c_n - c_{-n})$$

. אם נהפוך את הקשרים נקבל לכל $n \geq 1$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \;\; c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$. כיוון ש־$f$ ממשית, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, ולכן אם ניקח ערך מוחלט בנוסחאות האחרונות נקבל $|c_n|^2 = |c_{-n}|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2)$.

כיוון שהטור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2$ מתכנס בהחלט, ניתן לשנות סדר סכימה ולקבל שהוא שווה ל־

$$|c_0|^2+\sum_{n=1}^{\infty}(|c_n|^2+|c_{-n}|^2)=\frac{|a_0|^2}{2^2}+\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot\frac{a_n^2+b_n^2}{4}=\frac{a_0^2}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$$

.

7. תהי $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה ומחזורית 2π. יהי $\varepsilon>0$. ע"פ משפט פייר, קיים פולינום טריגונומטרי T עבורו $|f(x)-T(x)|<\varepsilon/2$, לכל $x\in[-\pi,\pi]$. נכתוב את T לחלק ממשי וחלק מדומה: $T(x)=T_R(x)+iT_I(x)$, כאשר כל אחד מהמחוברים הוא פולינום טריגונומטרי מהצורה:

$$A_0+A_1\cos(x)+...+A_N\cos(Nx)+B_1\sin(x)+...+B_N\sin(Nx)$$

כאשר $A_i,B_i\in\mathbb{R}$, לכל i.

נשים לב שמתקיים:

$$|f(x)-T_R(x)|\leq|(f(x)-T_R(x))-iT_I(x)|=|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

לכן, בה"כ נניח ש $T(x)=T_R(x)$. כעת, היות ו־ T היא סכום סופי של פונקציות בעלות טורי טיילור המתכנסים אליהן במ"ש בכל הישר, גם ל T יש טור טיילור המתכנס אליה במ"ש ב $\mathbb{R}$ ובפרט ב $[-\pi,\pi]$. כלומר, קיים פולינום P עבורו $|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. כעת, מאי־שיוויון המשולש, מתקיים:

$$|f(x)-P(x)|\leq|f(x)-T(x)|+|T(x)-P(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

כנדרש. הערה: יכולנו להניח בה"כ ש f היא מחזורית משום שאחרת, היינו מרחיבים אותה באופן רציף לקטע גדול יותר שם היא תהיה מחזורית (כלומר שערכיה בקצוות יהיו זהים) ואז היינו חוזרים על התהליך, כאשר עובדים בקטע החדש (את כל המשפטים שראינו על פורייה ופייר, ניתן להעביר לכל קטע סופי, ע"י החלפת משתנים ־ חישבו על כך!)

8. (א) נכון. הוכחה: יהי $\varepsilon>0$, אז קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$ לכל $x\in[0,2\pi]$. לכן, לכל $n<N$ מתקיים

$$||f-f_n||_2=\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)-f_n(x)|^2\right)^{1/2}<\left(\frac{1}{2\pi}\cdot\varepsilon^2\cdot\int_0^{2\pi}1\right)^{1/2}=\varepsilon$$

כנדרש.

(ב) לא נכון. נגדיר סדרת פונקציות:

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ \sqrt{2\pi n} & 0<x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\leq x\leq 2\pi\end{cases}$$

סדרה זו מתכנסת נקודתית ל $f \equiv 0$ אך בנוסף מתקיים $||f_n||_2 = ||f_n - 0||_2 = 1$ לכל n.
אף על פי שסדרה זו היא של פונקציות שאינן רציפות, אין בעיה לבנות סדרה של פונקציות שהינן רציפות ומקיימת את אותן תנאים (ודאו זאת).

(ג) לא נכון. למעשה התכנסות בנורמה אינה גוררת התכנסות נקודתית, כפי שמצוין בסעיף הבא.

(ד) לא נכון. דוגמא טריוויאלית תהיה לקחת סדרה קבועה של הפונקציה $g = f_n$ הנבדלת מן הפונקציה $f \equiv 0$ רק במספר סופי של נקודות (או נקודה אחת לצורך העניין). סדרת הפונקציות הנ"ל מתכנסת בנורמה לפונקציה $f \equiv 0$ אבל לא נקודתית. למעשה, ניתן לבנות סדרת פונקציות שמתכנסת בנורמה ל 0, אך איננה מתכנסת באף נקודה. הסבר: בנו סדרה של פונקציות המרוכזות סביב נקודה אחת והן הולכות ונהיות צרות (בזמן שכל פונקציה מרוכזת סביב נקודה אחרת, כך שכל הקטע יכוסה אינסוף פעמים).

9. ראשית, נתון ש g אינטגרבלית ולכן קיים $M > 0$ כך ש $\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt\right| < M$. כעת, נראה שלמעשה מתקיים

$$(f*g)'(x) = (f'*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x-t)g(t)dt.$$

היות וראינו שקונבולוציה של שתי פונקציות אינטגרביליות היא פונקציה רציפה, נסיק ש $f*g$ גזירה ברציפות. אם כן, ע"פ הגדרת הנגזרת, מתקיים:

$$\lim_{\Delta h \to 0} \frac{(f*g)(x+\Delta h) - (f*g)(x)}{\Delta h} = \lim_{\Delta h \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t+\Delta h) - f(x-t)}{\Delta h} \cdot g(t)dt =$$
$$= \lim_{\Delta h \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(c_h) \cdot g(t)dt$$

כאשר $x - t \leq c_h \leq x - t + \Delta h$ כפי שנובע משימוש במשפט לגרנז'. היות ו f' רציפה ב $[-\pi, \pi]$ היא רציפה במ"ש בקטע זה ולכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים Δh קטן מספיק (ללא תלות ב x או ב t) כך ש $|f'(c_h) - f'(x-t)| < \frac{\varepsilon}{M}$. כעת, מתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(c_h) \cdot g(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f'(c_h) - f'(x-t)) \cdot g(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x-t) \cdot g(t)dt$$

ולכן

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f'(c_h) \cdot g(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x-t) \cdot g(t)dt\right| =$$
$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} (f'(c_h) - f'(x-t)) \cdot g(t)dt\right| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{M} \cdot \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(t)dt\right| < \varepsilon$$

ולכן

$$(f*g)'(x)=\lim_{\Delta h\to 0}\frac{(f*g)(x+\Delta h)-(f*g)(x)}{\Delta h}=\int_{-\pi}^{\pi}f'(x-t)g(t)dt=(f'*g)(x)$$

כנדרש. הערה: שימו לב כי א־פריורית אין הצדקה להכנס עם הגבול לתוך האינטגרל ולגזור שם את f אך למעשה זה אכן ניתן.

10. (א) חישוב:

$$\begin{aligned}P_r(x)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}=\sum_{n=1}^{\infty}r^ne^{inx}+\sum_{n=0}^{\infty}r^ne^{-inx}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(re^{ix}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(re^{-ix}\right)^n=\\&=\frac{re^{ix}}{1-re^{ix}}+\frac{1}{1-re^{-ix}}=\frac{re^{ix}(1-re^{-ix})+(1-re^{ix})}{1-r(e^{ix}+e^{-ix})+r^2e^{ix}e^{-ix}}=\\&=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\end{aligned}$$

(ב) ראשית כל, ניתן לקבל ש $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x)dx=1$ באופן מיידי ע"י אינטגרציה איבר־איבר של ההצגה $\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}e^{inx}$ (מותר משום שטור זה מתכנס במ"ש). אכן, כל האיברים בטור מתאפסים באינטגרציה מלבד מהאיבר המתאים ל $n=0$, הנותן 1. כמו כן, מההצגה $\frac{1-r^2}{1-2r\cos x-r^2}$ ברור שהגרעין הוא חיובי ולכן האינטגרל שלו בערך מוחלט חסום באופן אחיד, כלומר לכל $0<r<1$ (הרי האינטגרל שווה ל 1). לבסוף, יש להראות שמחוץ לסביבת $\delta>0$ כלשהי של 0, האינטגרל של הגרעין שואף לאפס כאשר $r\to 1^-$. נשים לב שמתקיים

$$1-2r\cos x+r^2=(1-r)^2+2r(1-\cos x)$$

ולכן, אם $\frac{1}{2}\le r\le 1$ וגם $\delta\le|x|\le\pi$ אז קיים c_δ כך ש $P_r(x)\le\frac{1-r^2}{c_\delta}$. מכאן נובע מייד כי

$$.\frac{1}{2\pi}\int_{|x|\ge\delta}P_r(x)\underset{r\to 1^-}{\to}0$$

לפיכך, $P_r(x)$ הוא גרעין טוב. אם כן, מכאן ניתן להסיק (כמו במקרה של גרעין פייר) למשל, שלפונקציה רציפה f, הקונבולוציה עם גרעין פואסון, מתכנסת במ"ש ל f, כאשר $r\to 1^-$.

(ג) ראינו בשאלה 9 שלכל פונקציה אינטגרבילית f ופונקציה גזירה ברציפות g מתקיים

$$.(f*g)'(x)=(f*g')(x)$$

נשים לב ש $P_r(x)$ גזירה ברציפות אינסוף פעמים. זה נכון משום שהיא הרכבה של $\cos x$ ו $\frac{1-r^2}{1-2rx+r^2}$ אשר כל אחת מהן גזירה ברציפות אינסוף פעמים בתחום ההגדרה הרלוונטי ־ ודאו זאת. לכן, נובע כי $f*P_r$ גזירה אינסוף פעמים.

11. (א) על פי הגדרה מתקיים:

$$.(f*g_n)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g_n(t)f(x-t)dt=\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}f(x-t)dt$$

מהחלפת המשתנים $u=x-t$, אנו מקבלים

$$.(f*g_n)(x)=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}f(u)du$$

כמו כן, f רציפה ולכן ממשפט ניוטון־לייבניץ, נובע ש $(f*g_n)(x)$ (גוזרים את הביטוי הזה ומקבלים את $f(x-\frac{1}{n})+f(x+\frac{1}{n})$ אשר ודאי רציפה). בנוסף, נשים לב ש $g_n(x)$ היא גרעין טוב (למעשה זה הגרעין־טוב הכי פשוט שניתן לחשוב עליו). אכן, הפונקציה חיובית וחסומה ע"י 1 ולכן האינטגרל של הערך המוחלט שלה חסום גם כן. בנוסף קל לוודא שהאינטגרל שלה שווה ל 1 ולבסוף, היא מתרכזת סביב 0, שכן מחוץ לכל סביבה של 0, היא מתאפסת, החל מ n מסוים. אם כן, ע"פ משפט בדבר גרעינים טובים, $(f*g_n)(x)$ מתכנסת במ"ש ל f.

<u>הערה:</u> שימו לב, שברגע שקיבלנו את ההצגה:

$$(f*g_n)(x)=\frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}f(u)du$$

יכולנו לפנות לתרגול 3
(ראו עמוד 9 בסיכום המופיע באתר: http://www.math.tau.ac.il/ boazslom/hedva2/),
שם הוכחנו שאכן יש התכנסות במ"ש ל f, בדרך ישירה.

(ב) נשתמש בסעיף הקודם, באופן הבא: עבור פונקציה גזירה ברציפות g, אנחנו יודעים שמתקיים

$$,|\widehat{g}(n)|=\left|\frac{\widehat{g'}(n)}{n}\right|\le\frac{M}{n}$$

כאשר, $M>0$ הוא החסם של g' (שכאמור, רציפה ולכן חסומה). נחזור להוכיח את הטענה שלנו: יהי $\varepsilon>0$. לפי הסעיף הקודם, קיימת פונקציה גזירה ברציפות g כך ש $|f(x)-g(x)|<\varepsilon/2$ לכל $x\in[-\pi,\pi]$. מתקיים

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(n)|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)e^{-int}dt\right|\le\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)-g(t)|e^{-int}dt\right|+\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)e^{-int}dt\right|\\&\le\left|\frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-int}dt\right|+|\widehat{g}(n)|\le\varepsilon+\frac{M}{n}\end{aligned}$$

ולכן החל מ n מסוים מתקיים $|\widehat{f}(n)|<\varepsilon$

12. נסמן $M=\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}|P(x)|$. צריך להוכיח ש $|P'(x)|\leq NM$ $\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]}$. נתבונן בגרעין פייר:

$$F_N(t)=\sum_{n=-N}^{N}c_ne^{int}=\sum_{n=-N}^{N}\frac{N-|n|}{N}e^{int}.$$

על מנת לקבל גרעין חדש, בעל מקדמי פורייה שונים מאפס רק ב n־ים חיוביים, נגדיר את ההזזה ומתיחה הבאה של גרעין פייר: $k(t)=Ne^{iNt}F_N(t)$. כעת, מתקיים:

$$k(t)=\sum_{n=-N}^{N}N\cdot\frac{N-|n|}{N}\cdot e^{i(n+N)t}=\sum_{n=0}^{2N}(N-(N-n))e^{int}=\sum_{n=0}^{2N}ne^{int}$$

ולכן

$$\widehat{k}(n)=\begin{cases}n, & n=0,1,2,...,2N\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}.$$

כמו כן $\widehat{P}(n)=0$ לכל $|n|>N$ ולכן

$$\widehat{(k*P)}(n)=\widehat{k}(n)\widehat{P}(n)=\begin{cases}n\widehat{P}(n) & ,\ n=0,1,2,...,N\\ 0 & ,\ \text{אחרת}\end{cases}$$

נשים לב שמתקיים גם $\widehat{P'}(n)=in\widehat{P}(n)$. כלומר קיבלנו ש $i(k*P)(t)=P'(t)$. כעת, כל מה שנותר הוא לחסום את הנגזרת באופן הבא:

$$\begin{aligned}|P'(t)|&=\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}k(t)P(x-t)\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|k(t)|\cdot|P(x-t)|=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Ne^{iNt}F_N(t)|\cdot|P(x-t)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|Ne^{iNt}F_N(t)|\cdot M=\\&=NM\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|F_N(t)|=NM\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_N(t)=NM\end{aligned}$$

כאשר בשני המעברים האחרונים השתמשנו בתכונות הטובות של גרעין פייר (חיוביות ואינטגרל שווה ל 1). לבסוף, קל לוודא שעבור הפונקציה: e^{iNx}, האי־שיוויון הוא בעצם שיוויון.

<u>הערה</u>: באופן כללי אי־אפשר לחסום את הנגזרת ע"י הפונקציה, בעוד שלהיפך ניתן (עובדה שגם ברורה אינטואיטיבית), למשל באמצעות לגרנז'.

סמסטר ב', תשע"א

חדו"א 2 - תרגיל מס' 12

1. בכל אחת מהדוגמאות הבאות, החליטו אם $A \subseteq \mathbb{R}^2$ פתוחה, סגורה או לא ולא.

   (א) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq 4\}$
   (ב) $A = \{(s, t) \in \mathbb{Q}^2\}$
   (ג) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
   (ד) $A = \{(x, \sin x) : x \in \mathbb{R}\}$

2. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ הראו כי

   (א) $\bar{A}$ היא חיתוך של כל הקבוצות הסגורות F כך ש $A \subseteq F$
   (ב) $int(A)$ הוא איחוד כל הקבוצות הפתוחות G כך ש $G \subseteq A$

3. תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ הוכח/הפרך

   (א) $int(int(A)) = int(A)$
   (ב) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
   (ג) $\partial(\partial A) = \partial A$
   (ד) ∂A קבוצה סגורה
   (ה) $\partial A = \bar{A} \setminus int(A)$

4. (א) תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$. נסמן ב $Acc(A)$ את קבוצת נקודות ההצטברות של A וב A_d את קבוצת הנקודות המבודדות של A.
   הראו כי $Acc(A) \cup A_d$ סגורה וש $Acc(A) \cup A_d = \bar{A}$

   (ב) תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהי $x_1, x_2, \ldots$ סדרה מתכנסת כך ש $x_i \in A \ \forall i = 1, 2, \ldots$. הראו כי הגבול של הסדרה נמצא ב $\bar{A}$.
   כלומר: $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \bar{A}$

5. <u>הלמה של קנטור:</u> קבוצה $K \subset \mathbb{R}^n$ נקראת קומפקטית אם היא סגורה וחסומה. נניח ש־ $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$ סדרת קבוצות קומפקטיות ולא־ריקות ב־ $\mathbb{R}^n$. הוכיחו ש־ $\cap_{i=1}^{\infty} K_i \neq \emptyset$.
   (רמז: בחרו נקודה בכל קבוצה, והביטו בתת־סדרה מתכנסת).
   האם חיוני להניח שהקבוצות סגורות וחסומות?

6. תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

   (א) עבור $A \subseteq \mathbb{R}^m$ נסמן את התמונה ההפוכה עבור הקבוצה $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \in A\}$
   הראו שאם f רציפה, אז עבור כל קבוצה פתוחה $G \subseteq \mathbb{R}^m$ מתקיים ש $f^{-1}(G)$ קבוצה פתוחה.

(ב) נגדיר את התמונה הקידמית כך $f(A)=\{f(x)\in\mathbb{R}^m:\ x\in A\}$
תהי $G\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ו f רציפה. האם $f(G)$ קבוצה פתוחה? אם כן הוכיחו, אם לא תנו דוגמה נגדית.

7. תהיינה $A,K\subset\mathbb{R}^n$ קבוצות זרות, K קומפקטית, A סגורה. הראו ש־

$$\inf_{x\in K,y\in A}\|x-y\|>0.$$

8. מצאו וציירו את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות. האם הן חסומות? רציפות?

(א) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$.

(ב) $f(x,y)=(x^3+y^3)/(x^2+y^2)$ (איך כדאי להגדיר את הפונקציה באפס?)

(ג) $f(x,y)=\arcsin(y/x)$.

(ד) $f(x,y)=sign(\sin(x)\sin(y))$.

9. עבור כל אחת מהפונקציות $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הבאות, האם קיימים $\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)$, $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)$ ו־ $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$. אם גבול קיים, חשבו אותו.

(א) $f(x,y)=\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

(ב) $f(x,y)=\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(ג) $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{x})\sin(\frac{1}{y})$

(ד) $f(x,y)=\frac{x^2y-y^2x}{x^2+y^2}$?

10. האם הפונקציות הבאות רציפות במידה שווה בתחום הנתון?

(א) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ בתחום $\mathbb{R}^2$.

(ב) $f(x,y)=\sqrt{x}y^2$ בתחום $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

(ג) $f(x)=1/(1-\|x\|)$ ב־ $B_{(0,0)}(1)\subset\mathbb{R}^d$ (כדור פתוח). מהי תמונת הפונקציה?

תדו״ן ב-תרגיל 11

1) א) $A^c = \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 : \quad x+y=4 \right\}$

A^c היא קבוצה סגורה, לכן A פתוחה.

<u>הסבר - מדוע A^c סגורה:</u>

התנאי $x+y=4$ הוא "תנאי סגור", כלומר אם $V_n = \binom{x_n}{y_n}$ הם איברים ב- A^c (כלומר $x_n+y_n=4$) ומתקיים $V_n \longrightarrow V = \binom{x}{y}$, אז גם $x+y=4$.
(כי התכנסות $\Longleftrightarrow$ התכנסות בכל קורדינטה).

ב) $A = \mathbb{Q}^2$, $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. גם A וגם A^c אינן סגורות
לכן A לא פתוחה ולא סגורה.

<u>הסבר:</u>
ניתן למצוא רציונליים שמתכנסים לאי-רציונלי, נניח $s_n \to \sqrt{2}$
ואז $\binom{s_n}{s_n} \in A$ אבל $\left(\lim_{n\to\infty} \binom{s_n}{s_n}\right) \notin A$. לכן A לא סגורה.

[באופן דומה אי-רציונליים שמתכנסים לרציונלי, $r_n \longrightarrow 1$, אז $\binom{r_n}{r_n} \cancel{\notin} \in A^c$
אבל $\left(\lim \binom{r_n}{r_n}\right) \notin A^c$. לכן גם A^c לא סגורה.]

(ג) בדיוק מאותו נימוק כמו ב-(1ג), $x^2+y^2=1$ הוא "תנאי סגור", לכן $S^1=\left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\right\}$ היא קבוצה סגורה.

(ד) A היא גרף של פונקציה רציפה, נראה שזה גורר שהיא סגורה.

נניח ש- $\left\{\binom{x_n}{\sin x_n}\right\}\subseteq A$ היא סדרה מתכנסת, צריך להוכיח שגם הגבול שלה נמצא ב-A.

<u>בפרט</u>* $\{x_n\}$ מתכנסת, נניח לגבול $x\in\mathbb{R}$. מרציפות סינוס נובע ש- $\sin x_n \to \sin x$, ולכן* $\binom{x_n}{\sin x_n}\to\binom{x}{\sin x}$, כלומר הגבול הוא אכן נקודה ב-A.

[* השתמשנו בעובדה ש- $\left(\binom{x_n}{y_n}\to\binom{x}{y}\right) \iff \left(x_n\to x \text{ וגם } y_n\to y\right)$.]

(ב) (1ג) אם $A\subseteq F$ היא סגורה, ו- $\{x_n\}\subseteq A$ סדרה מתכנסת אזי $\{x_n\}\subseteq F$ ולכן (F סגורה) $(\lim x_n)\in F$, כלומר, $\bar{A}\subseteq F$.

לכן בחיתוך: $\left(\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ F \text{ סגורה}}} F\right)$, כל הקבוצות F מקיימות $\bar{A}\subseteq F$, ולכן גם החיתוך: $\boxed{\bar{A}\subseteq\left(\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ \text{סגורה}}} F\right)}$.

מצד שני, ~~בשביל ההכלה השנייה נעקוב בשלב~~ $\bar{A}$ היא קבוצה סגורה שמכילה את A, ולכן היא מופיעה בחיתוך בתור אחד ה-F-ים. נובע ש- $\boxed{\left(\bigcap_{\substack{A\subseteq F\\ \text{סגורה}}} F\right)\subseteq\bar{A}}$, ובסה"כ יש שוויון.

(ב) נסמן $B:=\bigcup_{\substack{G\subseteq A\\ \text{פתוחה}}} G$. רוצים להוכיח ש- $B=int(A)$. שכן, $int(A)$ הוא קבוצה פתוחה המוכלת ב-A לכן מופיעה בתור אחד ה-G-ים, וכיוון שבה איחוד נובע $\boxed{int(A)\subseteq B}$. מצד שני, מספיק להוכיח $G\subseteq int(A)$ לכל $G\subseteq A$ פתוחה.

כי אז גם האיחוד (B) יהיה מוכל ב- $int(A)$. לכן, תהי G קבוצה פתוחה כך ש- $G\subseteq A$, ונרצה להוכיח שבהכרח מתקיים ש $G\subseteq \underline{int(A)}\subseteq A$.

<u>תהי $x\in G$</u>. G פתוחה לכן יש כדור פתוח $B_x(r)$ (ברדיוס r סביב x) בתוך G. בסה"כ: $x\in B_x(r)\subseteq G\subseteq A$, כלומר מצאנו כדור <u>שמוכל ב-A</u>, סביב x, ולכן <u>$x\in int(A)$</u>. הוכחנו בזה ש- $G\subseteq int(A)$ (כי הראינו עבור כל $x\in G$).

כיוון שהוכחנו $G\subseteq int(A)$ לכל G פתוחה המקיימת $G\subseteq A$, אז כלומר נקבל $\boxed{B=\bigcup_{\substack{G \text{ פתוחה} \\ G\subseteq A}} G \subseteq int(A)}$, מה שמשלים את ההוכחה

$$\boxed{\bigcup_{\substack{G\subseteq A \\ G \text{ פתוחה}}} G = int(A)}$$

(5) יהיו $\{K_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרת קבוצות קומפקטיות לא ריקות ב- $\mathbb{R}^n$, ונניח שזו סדרה יורדת, כלומר $K_{i+1}\subseteq K_i$ לכל $i\in\mathbb{N}$. צ"ל $\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i\neq\emptyset$.

<u>הוכחה:</u>

נשתמש ברמז. יהיו, לכל i, $x_i\in K_i$. כיוון שכל ה-K_i-ים מוכלים ב-K_1, $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subseteq K_1$. K_1 סגורה וחסומה, לכן לכל סדרה בתוכה יש תת סדרה מתכנסת. בלי הגבלת הכלליות (בה"כ) $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, ונסמן $l=\lim_{i\to\infty}x_i$. נוכיח שלכל $i\in\mathbb{N}$, $l\in K_i$ (כלומר הגבול נמצא בתוך כל הקבוצות, ולכן גם בחיתוך שלהן). יהי $i_0\in\mathbb{N}$.

ממקום מסוים, כל איברי הסדרה נמצאים ב- K_{i_0}; $\{x_j\}_{j=i_0}^{\infty}\subseteq K_{i_0}$

K_{i_0} סגורה ולכן $l=\lim_{j\to\infty}x_j$ גם נמצא ב- K_{i_0}.

הראינו שלכל $i\in\mathbb{N}$, $l\in K_i$. לכן $l\in\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i$, וכנדרש.

$\bigcap_{i=1}^{\infty}K_i\neq 0$. <u>חיוניות שני התנאים:</u>

① לא סגורות; $K_i=(\frac{-1}{i},\frac{1}{i})$. $(\bigcap K_i=\emptyset)$

② לא חסומות; $K_i=[i,\infty)$. $(\bigcap K_i=\emptyset)$

שתי הדוגמאות יכולות לעבוד חלק ב- $\mathbb{R}^n$; נכון!

3 (א) $int A$ הינה קבוצה פתוחה עפ"י הגדרה ולכן $int A = int(int A)$.

(ב) בדיוק כמו בסעיף א', $\bar{A}$ הינה קבוצה סגורה (נובע גם משאלה 2 סעיף ב')
ולכן $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(ג) לא נכון. למשל $A = \mathbb{Q}$ (עם הרציונלים ב $\mathbb{R}$). אז $\partial A = \mathbb{R}$
(כי לכל $x \in \mathbb{R}$, כל כדור סביב x חותך גם את A וגם את A^c).
ואז $\partial(\partial A) = \partial \mathbb{R} = \emptyset$.

3 נכון. הטענה נובעת מהסעיף הבא כי:

$$\partial A = \bar{A} \setminus int(A) = \bar{A} \cap (int(A))^c$$

ו- $int(A)^c$ הינה קבוצה סגורה (כי $int A$ פתוחה) וחיתוך של סגורות סגורה.
אפשר גם להראות ישירות ש $(\partial A)^c$ פתוחה.

(ה) עפ"י הגדרה, $x \in \partial A$ אם בכל סביבה $B_r(x)$ של x יש נקודות
השייכות ל A ונקודות השייכות ל A^c. היות ויש נק' השייכות ל A, עפ"י
הגדרה $x \in \bar{A}$ ($x \in \bar{A}$ אמ"מ בכל סביבה של x יש נק' השייכות ל A).
כמו כן $x \notin int A$ כי יש נקודות ב $B_r(x)$ השייכות ל A^c. לכן $\partial A \subseteq \bar{A} \setminus int A$.
למעשה, אותו טיעון עובד בכיוון השני ולכן $\partial A = \bar{A} \setminus int A$.

4) א) מספיק להראות $\bar{A} = A_{cc}(A) \cup A_d$, ואז ו- $\bar{A}$ סגורה. (כפי ראינו).

נוכיח את הכיוון $\bar{A} \subseteq A_{cc}(A) \cup A_d$ (השלימו את הכיוון השני).

אם $x \in \bar{A}$ וגם $x \in A$ היא נקודה מבודדת אז ברור ש $x \in A_{cc}(A) \cup A_d$.

נניח ש $x \in \bar{A}$ איננה נקודה מבודדת. נראה ש $x \in A_{cc}(A)$.

ע"פ הגדרה, בכל סביבה של x יש נק' מ A. היות ו x איננה מבודדת, גם בכל סביבה מנוקבת יש נק' מ A ולכן, ע"פ הגדרה, $x \in A_{cc}(A)$.

ב) נתונה סדרה $x_n \longrightarrow x$ כך ש $x_n \in A$ כאשר A קבוצה כלשהי.

ע"פ הגדרת הגבול, לכל סביבה של x (כגון כדור ברדיוס $\varepsilon > 0$ סביב x, $B_\varepsilon(x)$)

יש N מספיק גדול כך ש $x_n \in B_\varepsilon(x)$ לכל $n \geq N$.

כלומר בכל סביבה (אפילו מנוקבת, אלא אם כן x_n היא סדרה קבועה $x, x, \dots$) של x יש נקודות השייכות ל A (x_m, $m \geq N$) ולכן ע"פ הגדרה, $x \in \bar{A}$.

(6) (א) $f^{-1}(A) = \{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\in A\}$. f רציפה. צ"ל שאם G

פתוחה אז $f^{-1}(G)$ פתוחה. נניח ש $y\in f^{-1}(G)$. צ"ל שיש

סביבה (כדור) סביב y המוכלת ב- $f^{-1}(G)$.

עפ"י הגדרת הרציפות, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $\|y-x\|<\delta$

אז $\|f(y)-f(x)\|<\varepsilon$ (y קבוע). G פתוחה ולכן קיים $\varepsilon_0>0$ כך

ש $B_{\varepsilon_0}(f(y))\subseteq G$. לכן ל ε_0 מתאים $\delta_0>0$ כלשהו שעבורו

$\forall x: \|x-y\|<\delta_0,\ \|f(x)-f(y)\|<\varepsilon_0$

כלומר לכל $x\in B_{\delta_0}(y)$ מתקיים $f(x)\in B_{\varepsilon_0}(f(y))$ ולכן $f(x)\in G$.

מכאן נובע ש $x\in f^{-1}(G)$ כלומר $f^{-1}(G)$ פתוחה.

(ב) נתונה ההגדרה: $f(A)=\{f(x): x\in A\}$, כאשר $A\subset\mathbb{R}^m$

ו- $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. האם $f(G)$ פתוחה אם G פתוחה

ו- f רציפה? לא בהכרח. לדוגמה, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה הקבועה,

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)=1$. אז $G=\mathbb{R}$ פתוחה ו- $f(G)=\{1\}$

היא קבוצה סגורה.

~~חדו"א 2 - תרגיל מס' 12 - פתרונות~~

7

(1) נניח בשלילה ש- $\inf_{x\in K, y\in A}\|x-y\|=0$. אז קיימות סדרות $x_n\in K, y_n\in A$, כך ש- $\|x_n-y_n\|\to 0$. מכך ש- K קומפקטית, לסדרה (x_n) יש תת-סדרה מתכנסת x_{n_k}. נסמן $x_{n_k}\to x\in K$. אז $\|x_{n_k}-y_{n_k}\|\to 0$. לכן גם $y_{n_k}\to x$. אך מכך ש- A סגורה ואיברי $y_{n_k}\in A$, מקבלים שגם $x\in A$. קיבלנו $x\in A\cap K$, בסתירה לזרות הקבוצות.

הערה: הטענה אינה נכונה בלי הנחת הקומפקטיות של אחת הקבוצות. בין 2 קבוצות סגורות זרות ייתכן מצב של מרחק השואף ל-0. למשל - אסימפטוטה.

(2) (א) הכיוון הלא-ברור הוא להוכיח שכל קבוצה פתוחה ניתן להציג כאיחוד זר של קטעים פתוחים. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה פתוחה ויהי $x\in A$. נגדיר $a_x=\inf\{a\in\mathbb{R} \mid (a,x]\subseteq A\}$ (אם הקבוצה אינה חסומה אז נגדיר $a_x=-\infty$), ובאופן דומה $b_x=\sup\{b\in\mathbb{R} \mid [x,b)\subseteq A\}$ (ואם לא חסומה מלעיל אז $b_x=\infty$). ברור $(a_x,b_x)\subseteq A$ ולכן ניתן להציג $A=\bigcup_{x\in A}(a_x,b_x)$. קל להוכיח כי אם $y\in(a_x,b_x)$ אז $(a_y,b_y)=(a_x,b_x)$ ומכאן נובע שהצגה זו היא איחוד זר של קטעים.

(ב) כיוון אחד - כל קטע A הוא קבוצה קשירה מסילתית: יהי $c,d\in A$, ונניח $c\le d$. אז מכך ש- A קטע, כל $c\le y\le d$ מקיים גם $y\in A$, כלומר $[c,d]\subseteq A$. קל לתאר מסילה $\gamma:[0,1]\to[c,d]$ (למשל פונק' לינארית המקיימת $\gamma(0)=c, \gamma(1)=d$). $Im\,\gamma=[c,d]\subseteq A$ ולכן A קשירה מסילתית.

בכיוון ההפוך - אם $A\subseteq\mathbb{R}$ קשירה מסילתית אז היא קטע: נניח כי A קשירה מסילתית ואינה קטע, אז קיימים $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $a\le b\le c$ וגם $a,c\in A$, אך $b\notin A$. מהקשירות המסילתית יש מסילה $\gamma:[0,1]\to A$ עם $\gamma(0)=a$, $\gamma(1)=c$. אבל ממשפט ערך הביניים קיים $\lambda\in[0,1]$ עם $\gamma(\lambda)=b$. מקבלים $b\in A$ בסתירה.

$f(x,y)=\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ (א) (3) 9

$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\pm\infty$ - לא קיים

באופן סימטרי גם הגבול החוזר השני אינו קיים.

בדיקת הגבול לאורך הישר $y=0$ - $f(x,0)=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=\pm\infty$ - לא קיים

מוכחה שגם הגבול בנק' לא קיים.

(ב)

$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{|x|}=\pm1$ - לא קיים

$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=\lim_{y\to0}\frac{\ln(e^y)}{|y|}=\lim_{y\to0}\frac{y}{|y|}=\pm1$ - לא קיים

מאי-קיום הגבול לאורך הישר $x=0$ למשל, נובע כי גם הגבול הכפול בנק' אינו קיים -

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{|y|}=\pm1$ - לא קיים

(ג)

$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=\lim_{x\to0}\left(\underbrace{\lim_{y\to0}x^2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}}_{\text{לא קיים}}+\underbrace{\lim_{y\to0}y^2\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}}_{=0}\right)$

לכן הגבול החוזר בנק' אינו קיים (באופן סימטרי גם לגבי השני).

מנגד -

$|f(x,y)|=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right|\le|x^2+y^2|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

ולכן הגבול הכפול בנק' קיים ושווה ל-0 - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$;

(ד)

$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2y-y^2x}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^2}=0$; $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0} f(x,y)=0$ - באופן דומה

אך גם -

$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le|y|$; $\left|\frac{y^2x}{x^2+y^2}\right|\le|x|$

ולכן

$|f(x,y)|\le|x|+|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$

ואז גם הגבול הכפול קיים ושווה לאפס - $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$.

4. אגף שמאל - מכך ש-e אי-רציונלי, $n!e$ לא יכול להיות מס' שלם, ולכן תמיד $|\cos(\pi n!e)|<1$. לכן $\lim_{k\to\infty}(\cos \pi n!e)^{2k}=0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\cos^{2k}(\pi n!e)=0$$

אגף ימין -

$$n!e = n!\cdot\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\text{מס' שלם}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$$

נעריך את המחובר השני -

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot k} \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p} = \frac{1}{n+1}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}\right)=\frac{1}{n}$$

מכאן -

$$n!e-[n!e] = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \le \frac{1}{n}$$

אם-כן -

$$|\cos(\pi n!e)| = |\cos[\pi(n!e-[n!e])]| \ge \left|\cos\frac{\pi}{n}\right|$$

ולכן

$$1 \ge \lim_{n\to\infty}\cos^{2k}(\pi n!e) \ge \lim_{n\to\infty}\cos^{2k}\frac{\pi}{n}=1$$

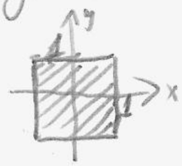
ואז -

$$\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\cos^{2k}(\pi n!e)=\lim_{k\to\infty}1=1$$

ואכן $0\ne 1$.

5. (א) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}$

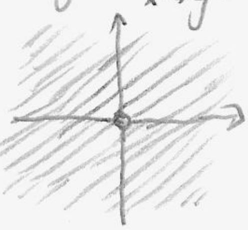
ת.ה. $\begin{cases}1-x^2\ge 0\\ 1-y^2\ge 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-1\le x\le 1\\ -1\le y\le 1\end{cases}$



הפונק' רציפה וחסומה (רציפה בתחום קומפקטי)

(ב) $f(x,y)=\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

ת.ה. - $x^2+y^2\ne 0 \Rightarrow (x,y)\ne(0,0)$



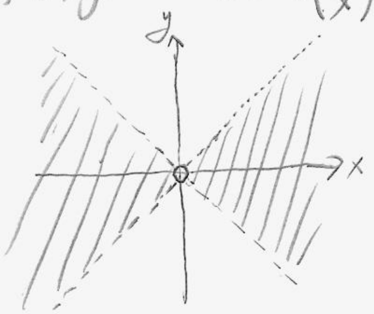
הפונק' רציפה בתחום הגדרתה, אך אינה חסומה - (למשל $f(x,0)=x\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$).

$$|f(x,y)|\le\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right|\le |x|+|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

לכן מותר להגדיר $f(0,0)=0$ וכך לקבל פונק' רציפה בכל המישור $\mathbb{R}^2$.

(2) ת.ה - $\begin{cases} \left|\frac{y}{x}\right| \le 1 \\ x\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |y|\le|x| \\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

$f(x,y)=\arcsin\left(\frac{y}{x}\right)$



הפונק' רציפה בתחום ההגדרה וגם חסומה (כי $Im\,\arcsin=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$).

(3) ת.ה - כל $\mathbb{R}^2$

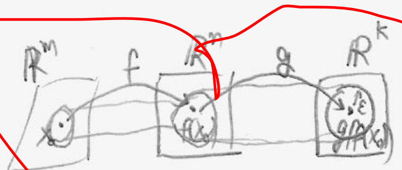
$f(x,y)=sign(\sin(x)\sin(y))$

הפונק' אינה רציפה - למשל - $\lim_{x\to0^+} f(x,\frac{\pi}{2}) = 1 \neq \lim_{x\to0^-} f(x,\frac{\pi}{2}) = -1$

(אך רציפה בתוך ריבועים מהצורה - $[k\pi,(k+1)\pi]\times[n\pi,(n+1)\pi]$).

וחסומה - $Im\, f=\{\pm1\}$.

(6)



$\mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^k$

נראה ש- $g\circ f$ רציפה ב- x_0: יהי $\varepsilon>0$, אז נראה שקיים $\delta>0$ כך ש- $(g\circ f)(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\varepsilon((g\circ f)(x_0))$.

מכך ש-g רציפה ב-$f(x_0)$, קיים $\tilde\delta>0$ כך ש $g(B_{\tilde\delta}(f(x_0))) \subseteq B_\varepsilon((g\circ f)(x_0))$.

כעת, מכך ש- f רציפה ב- x_0, קיים $\delta>0$ עם $f(B_\delta(x_0))\subseteq B_{\tilde\delta}(f(x_0))$.

משילוב שני פסוקים אלה מקבלים - $(g\circ f)(B_\delta(x_0)) = g(f(B_\delta(x_0))) \subseteq g(B_{\tilde\delta}(f(x_0))) \subseteq B_\varepsilon((g\circ f)(x_0))$ ∎

(7) $\inf_n f_n(x,y)<0 \iff \exists n.\ f_n(x,y)<0$ (ודאו זאת!)

לכן - $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \inf_n f_n(x,y)<0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid f_n(x,y)<0\} =$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n^{-1}[(-\infty,0)]$

$(-\infty,0)$ הוא קטע פתוח, ומרציפות f_n נובע $f_n^{-1}[(-\infty,0)]$ קב' פתוחה ב-$\mathbb{R}^2$

לכן גם הקבוצה הנתונה פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות.

(8) $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\left(\left((-1)^{i+j}|\tilde{A}_{ij}|\right)_{ij}\right)$ כאשר - $\tilde{A}_{ij}$ - המטריצה המתקבלת מ-A ממחיקת שורה i ועמודה j.

מדובר בהרכבה של הפונק' הבאות: $A\mapsto \tilde{A}_{ij}$ - פונקציית הטלה (ביטול כמה קואורדינטות), לקיחת דט' - פונק' רציפה, כפל ב-(-1) - פעולה רציפה גם כן, וקטור (מטריצה) של פונקציות רציפות - שוב מתקבלת פונק' רציפה, וחלוקה ב- $\det(A)$ - פונק' רציפה כי $\neq 0$. לכן f רציפה.

10

(9.) (א) מאי-שוויון המשולש- $||a|-|b|| \le |a-b|$ נובע -

(למעשה - $f(\underline{u})=\|\underline{u}\|$) -

$$|f(\underline{u})-f(\underline{v})| \le |\|\underline{u}\|-\|\underline{v}\|| \le \|\underline{u}-\underline{v}\|$$

במילים אחרות, הפונק' f מקיימת את תנאי ליפשיץ (עם מקדם 1) ולכן רציפה במידה שווה - ($\|\underline{u}-\underline{v}\|<\varepsilon \Rightarrow |f(\underline{u})-f(\underline{v})|<\varepsilon$).

(ב) $f(x,y)=\sqrt{x}\cdot y^2$. התחום $[0,1]\times[0,1]$ הינו תחום קומפקטי והפונק' רציפה, לכן גם רציפה במידה שווה בתחום.

(ג) נגדיר $\underline{x}_n=(1-\frac{1}{n},0)$. אז $f(x_n)=\frac{1}{1-(1-\frac{1}{n})}=n$ ולכן $|f(x_{n+1})-f(x_n)|=1$. עם זאת $|x_{n+1}-x_n|=\frac{1}{n(n+1)}\to 0$ ולכן הפונקציה אינה רציפה במ"ש.

(10) יהיו $a,b\in A$ ותהי $\gamma:[0,1]\to A$ מסילה עם $\gamma(0)=a$ ו-$\gamma(1)=b$ (קיימת מהקשירות המסילתית של A). נראה $f(a)=f(b)$ וכך ינבע ש-f קבועה.

נגדיר $\lambda=\sup\{x\in[0,1] \mid f(\gamma[0,x])=f(a)\}$. בחר $\varepsilon>0$ כי f קבועה בסביבה של a, וקיים קטע $[0,\varepsilon]$ כך ש- $\gamma[0,\varepsilon]$ מוכל בסביבה זו.

כמו-כן, אם $x_n\to x$ ו-$f(\gamma[0,x_n])=f(a)$ אז $[0,x]\subseteq\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,x_n]\right)\cup\{x\}$.

מכך שלכל n $f(\gamma(x_n))=f(a)$ ומרציפות f, γ, נובע ש- $f(\gamma(x))=f(a)$.

בסה"כ $f\left(\left(\bigcup_n[0,x_n]\right)\cup\{x_n\}\right)=f(a)$ ולכן $f(\gamma[0,x])=f(a)$. מכאן ש- $f(\gamma[0,\lambda])=f(a)$ (בפרט $f(\gamma(\lambda))=f(a)$). נניח ש- $\lambda<1$. מכך ש-f קבועה מקומית ו-γ רציפה, קיים $\delta>0$ כך ש- $f(\gamma[\lambda-\delta,\lambda+\delta])=f(a)$ אז $f[0,\lambda+\delta]=f(a)$ בסתירה להיות λ המירבי עם תכונה זו. מקבלים $\lambda=1$ ולכן $f(b)=f(\gamma(1))=f(\gamma(\lambda))=f(a)$ ו-f קבועה.