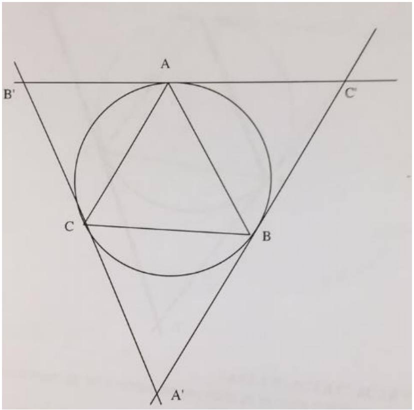
גיאומטריה אוקלידית – פתרון תרגיל 6

שאלה 1

נתבונן באיור הבא:



הוכיחו: AA', BB', CC' קונקורנטים.

הוכחה

נפעיל את משפט צ'בה ל-$\Delta A'B'C'$:

על-מנת ש-AA', BB', CC' יהיו קונקורנטים צריך להתקיים:

$$\frac{B'C}{CA'}\cdot\frac{A'B}{BC'}\cdot\frac{C'A}{AB'}=1 \quad (*)$$

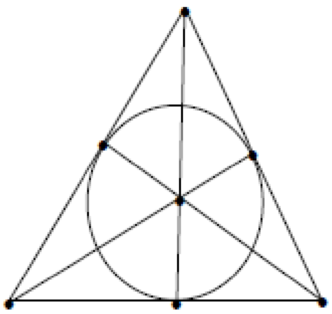
כיוון ש-$C'B'$, $A'B'$ ו-$C'A'$ משיקים – שני משיקים למעגל שיוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה

ולכן $\begin{cases} B'A = B'C \\ C'A = C'B \\ A'B = A'C \end{cases}$.

נציב את השוויונות ב-$(*)$ ונקבל 1 $\Leftarrow$ AA', BB', CC' קונקורנטים.

שאלה 2

מעגל γ משיק לצלעות המשולש ΔABC מבפנים. תהי D נקודת ההשקה על BC, E נקודת ההשקה על CA ו- F נקודת ההשקה על AB. בעזרת משפט צ'בה הוכיחו ש- AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת.



הוכחה

בכדי להראות כי AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, עלינו להוכיח לפי משפט צ'בה כי מתקים:

$$(*)\ \frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1 .$$

שני משיקים היוצאים מאותה נקודה מחוץ למעגל שווים ולכן: $\begin{cases} AF=EA \\ FB=BD \\ DC=CE \end{cases}$.

נציב ב-(*) ונקבל: $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=\underbrace{\frac{AF}{EA}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{BD}{FB}}_{=1}\cdot\underbrace{\frac{CE}{DC}}_{=1}=1$.

הוכחנו שהיחס הדרוש במשפט צב'ה שווה אחד ולכן AD, BE ו- CF נפגשים בנקודה אחת, כלומר קונקורנטים.

שאלה 3

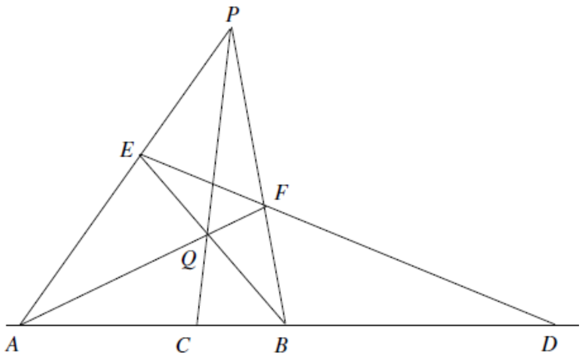
א. נסחו את משפט מנלאוס.

משפט מנלאוס

נתון משולש ΔABC, נקודה D על צלע AB, נקודה E על צלע AC ונקודה F על המשך הצלע BC שאינן מתלכדות עם קודקודי המשולש.

אז הנקודות D, E, F הן קוליניאריות (על ישר אחד) $\Leftrightarrow \frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CE}{EA}=-1$.

ב. הוכיחו ממשפטי צ'בה ומנלאוס שהנקודה D מקימת: $\frac{AC}{CB}=-\frac{AD}{DB}$.



הוכחה

נתבון ב- $\triangle ABP$. הקטעים AF, PC ו- BE נפגשים בנקודה אחת Q ולכן לפי משפט צ'בה:

$$\frac{PE}{EA}\cdot\frac{AC}{CB}\cdot\frac{BF}{FP}=1 .$$

כעת, הנקודות E, F ו- D הן קוליניאריות ולכן לפי משפט מנלאוס נקבל:

$$\frac{PE}{EA}\cdot\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BF}{FP}=-1$$

לכן משתי המשוואות נקבל: $\frac{AD}{DB}=-\frac{AC}{CB}$.

שאלה 4

הוכיחו כי הגבהים במשולש נפגשים בנקודה אחת.

הוכחה

נתבון ב- $\triangle ABC$ ונניח AD גובה ל BC, BE גובה ל AC ו- CF גובה ל AB, כלומר

$\begin{cases} AD \perp BC \\ BE \perp AC \\ CF \perp AB \end{cases}$. צריך להוכיח ששלושת הגבהים הנ"ל הם קונקורנטים, כלומר נפגשים בנקודה אחת.

נשתמש במשפט צ'בה.

תחילה, לפי: זוית $\measuredangle B$ משותפת

ו- $\measuredangle CFB=\measuredangle ADB=90^{\circ}$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle CFB \sim \triangle ADB$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{FB}{BD}=\frac{CF}{AD}$.

כעת, זוית $\measuredangle C$ משותפת

ו- $\measuredangle BEC=\measuredangle ADC=90^{\circ}$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle BEC \sim \triangle ADC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{AD}{BE}=\frac{DC}{CE}$.

וגם זוית $\measuredangle A$ משותפת

ו- $\measuredangle BEA=\measuredangle AFC=90^\circ$ לפי הנתון

נקבל דמיון משולשים לפי ז.ז: $\triangle BEA\sim\triangle AFC$.

לכן נקבל את היחס בין הצלעות המתאימות: $\frac{BE}{CF}=\frac{EA}{AF}$.

נכפול את היחסים שקיבלנו ונקבל:

$$\frac{FB}{BD}\cdot\frac{DC}{CE}\cdot\frac{EA}{AF}=\frac{CF}{AD}\cdot\frac{AD}{BE}\cdot\frac{BE}{CF}=1$$

ומכאן לפי משפט צ'בה מקבלים כי הגבהים AD,BE ו- CF קונקורנטים.

<u>שאלה 5</u>

המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ נוגע בצלעות BC,CA,AB בנקודות X,Y,Z בהתאמה.

המשך הקטע YZ פוגש את המשך הצלע BC בנקודה K.

הוכיחו: $\frac{BK}{KC}=-\frac{BX}{XC}$

<u>הוכחה</u>

לפי הבניה, הנקודות K,Z,Y קוליניאריות והישר העובר דרכן חותך את הצלעות/המשכי הצלעות ב- $\triangle ABC$. לכן נשתמש במשפט מנלאוס: $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CY}{YA}=-1$.

נעשה בניה: צ'ביאנים AX,BY ו- ZC. הצ'ביאנים נפגשים בנקודה אחת מכיוון שהם חוצי הזויות במשולש, ונקודת הפגישה היא מרכז המעגל החסום. לפי משפט צ'בה נקבל:

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

שתי מנות זהות לכן נבודד: $\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{CY}{YA}=-\frac{KC}{BK}$.

נציב במשוואה של צ'בה:

$$\frac{BX}{XC}\cdot\left(-\frac{KC}{BK}\right)=1\Rightarrow\frac{BX}{XC}=-\frac{BK}{KC}$$

<u>שאלה 6</u>

הוכיחו שבמודל הדיסק של פואנקרה, אם $A*C*B$ אז

$d\left(AC\right)+d\left(CB\right)=d\left(AB\right)$, כאשר $d\left(AB\right)$ הוא המרחק ההיפרבולי בין A ל- B.

<u>הוכחה</u>

נניח שהקטע AB חותך את שפת עיגול פואנקרה D (את ∂D) בנקודות P,Q כך ש

$Q*A*B*P$.

מתקיים: $\overline{AP}>\overline{BP}$, $\overline{BQ}>\overline{AQ}$ ולכן $\left(AB,PQ\right)=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BQ}}{\overline{BP}\cdot\overline{AQ}}>1$.

$\overline{AP}>\overline{CP}$, $\overline{CQ}>\overline{AQ}$ ולכן $\left(AC,PQ\right)=\frac{\overline{AP}\cdot\overline{CQ}}{\overline{CP}\cdot\overline{AQ}}>1$.

$\overline{CP}>\overline{BP}$, $\overline{BQ}>\overline{CQ}$ ולכן $\left(CB,PQ\right)=\frac{\overline{CP}\cdot\overline{BQ}}{\overline{BP}\cdot\overline{CQ}}>1$.

ניתן להוריד את הערך המוחלט ונקבל:

$$d\left(AC\right)=\Bigg|\underbrace{\ln\underbrace{\left(AC,PQ\right)}_{>1}}_{>0}\Bigg|=\ln\left(AC,PQ\right),$$

$$d\left(CB\right)=\Bigg|\underbrace{\ln\underbrace{\left(CB,PQ\right)}_{>1}}_{>0}\Bigg|=\ln\left(CB,PQ\right),$$

$$d\left(AB\right)=\Bigg|\underbrace{\ln\underbrace{\left(AB,PQ\right)}_{>1}}_{>0}\Bigg|=\ln\left(AB,PQ\right).$$

ומכאן מקבלים (נשתמש בחוקי $\ln$ ובהגדרת יחס מצטלב):

$$d\left(AC\right)+d\left(CB\right)=\ln\left(AC,PQ\right)+\ln\left(CB,PQ\right)=\ln\left[\left(AC,PQ\right)\cdot\left(CB,PQ\right)\right]=$$
$$\ln\left[\frac{\overline{AP}\cdot\overline{CQ}}{\overline{CP}\cdot\overline{AQ}}\cdot\frac{\overline{CP}\cdot\overline{BQ}}{\overline{BP}\cdot\overline{CQ}}\right]=\ln\left[\frac{\overline{AP}\cdot\overline{BQ}}{\overline{AQ}\cdot\overline{BP}}\right]=\ln\left(AB,PQ\right)=d\left(AB\right)$$