

תרגיל 6 מבוא לתורת החבורות

שאלה 6.1 תהיינה H, K שתי חבורות. הוכיחו כי $H \times \{e\} \triangleleft H \times K$.

שאלה 6.2 ניקח $G = \text{GL}_n(\mathbb{F})$. האם תתי החבורות הבאות הן נורמליות?

1. תת החבורה של המטריצות הסקלריות (כלומר מטריצות מהצורה cI).
2. תת החבורה של המטריצות אלכסוניות (כלומר מטריצות שיש להן איברים רק על האלכסון).

שאלה 6.3 תהי $G = S_3$ ו $H = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\rangle$. הראו כי הפעולה הטבעית על G/H אינה מוגדרת היטב.

שאלה 6.4 בכל סעיף נתונה חבורה G ותת חבורה נורמלית H ויש לחשב סדר של איברים בחבורת המנה.

1. $H = 20\mathbb{Z}$ $G = \mathbb{Z}$. מה הסדר של $2 + H, 5 + H, 3 + H$?
2. $H = \langle 5 \rangle$ ו $G = \mathbb{Z}_{20}$. מה הסדר של כל איבר ב G/H ? הסיקו: איזו חבורה מוכרת איזומורפית ל G/H ?
3. $H = \langle 4 \rangle$ ו $G = U_{15}$. מה הסדר של כל איבר ב G/H ? הסיקו: איזו חבורה מוכרת איזומורפית ל G/H ?

שאלה 6.5 תהי G חבורה ו $H \triangleleft G$ תת חבורה נורמלית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם H ציקלית ו G/H ציקלית אז G ציקלית.
2. אם H אבלית ו G/H אבלית אז G אבלית.
3. אם G אבלית אז G/H אבלית.
4. אם G ציקלית אז G/H ציקלית.

שאלה 6.6 נביט על $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$. מצאו שתי תתי חבורות נורמליות N_1, N_2 שהן לא איזומורפיות, אבל

$$G/N_1 \simeq G/N_2$$

חבורות המנה איזומורפיות.