— הערה לגבי $\mathbb{R}$ ד"ר 3 באין, 14/12/10 —

בכתה הוכחנו, בעזרת הנחת הפולריות, שאם $\|T^*v\|=\|Tv\|$ לכל v, אז T נורמלי,
ושאם $\|v\|=\|Tv\|$ לכל v, אז T אוניטרי.
נתאר כאן גישה נוספת.

משפט: יהי $T:V\to V$ אופרטור צמוד לעצמו (סל"ע), כך ש-$\langle Tv,v\rangle=0$ $(\forall v\in V)$. אזי $T=\theta$.

ה. לכל $u,v\in V$,

$$0\overset{\text{נתון}}{=}\langle T(u+v),u+v\rangle\overset{\text{לינ' }T}{=}\langle Tu+Tv,u+v\rangle\overset{\text{לינ' ברכיב I, במקל' II}}{=}\langle Tu,u\rangle+\langle Tu,v\rangle+\langle Tv,u\rangle+\langle Tv,v\rangle\overset{\text{נתון}}{\underset{\text{+הרמיטיות}}{=}}$$

$$=0+\overline{\langle v,Tu\rangle}+\langle Tv,u\rangle+\underset{\text{וכוכב נלו 3}}{0}=\overline{\langle T^*v,u\rangle}+\langle Tv,u\rangle\underset{(T^*=T)}{=}\overline{\langle Tv,u\rangle}+\langle Tv,u\rangle=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\langle Tv,u\rangle$$

לסיכום, $2\,\mathrm{Re}\langle Tv,u\rangle=0$, ולכן $\mathrm{Re}\langle Tv,u\rangle=0$ לכל $u,v\in V$.

בפרט, אם V מ"ו <u>מעל $\mathbb{R}$</u>, $\langle Tv,u\rangle=0$ לכל u, ולכן $Tv=\vec{0}$ (לכל $v\in V$), כלומר $T=\theta$. ◻

אם V מ"ו <u>מעל $\mathbb{C}$</u>: נציב iu, v במשוואה $\mathrm{Re}\langle Tv,u\rangle=0$ ונקבל

$$0=\mathrm{Re}\langle Tv,iu\rangle=\mathrm{Re}(-i\langle Tv,u\rangle)=\mathrm{Im}\langle Tv,u\rangle$$

ולכן גם $0=\mathrm{Im}\langle Tv,u\rangle$, כלומר $\langle Tv,u\rangle=0$ לכל $u,v\in V$ ולכן $T=\theta$. //

מסקנה: אם $\|T^*v\|=\|Tv\|$ לכל $v\in V$, אז T נורמלי.

ה. מהמשפט לעיל, מספיק להוכיח שלכל $v\in V$, $\langle (TT^*-T^*T)v,v\rangle=0$.

(יהי $R=TT^*-T^*T$. R סל"ע: $R^*=(TT^*-T^*T)^*=(TT^*)^*-(T^*T)^*=$

$$=T^{**}T^*-T^*T^{**}=TT^*-T^*T=R$$

לכן אם $\langle Rv,v\rangle=0$ לכל v, אז $TT^*-T^*T=R=\theta$, ולכן $TT^*=T^*T$.)

נחשב:

$$\langle (TT^*-T^*T)v,v\rangle=\langle TT^*v-T^*Tv,v\rangle\overset{\text{לינ' I}}{=}\langle TT^*v,v\rangle-\langle T^*Tv,v\rangle=$$

$$\overset{\text{כוכב נלו 3}}{=}\langle T^*v,T^*v\rangle-\langle Tv,Tv\rangle=\|T^*v\|^2-\|Tv\|^2\underset{\text{נתון}}{=}0.$$ //

תרגיל: הוכח, בצורה דומה, שאם $\|v\|=\|Tv\|$ לכל $v\in V$, אז T אוניטרי.

הערה: בעזרת המשפט הנ"ל אפשר להראות שהפו' $\|T\|:=\sup_{\|v\|=1}|\langle Tv,v\rangle|$ היא נורמה על $\mathrm{Hom}(V,V)$!

— סוף —