מבנים דיסקרטיים – תרגיל בית 8

1. יהי R תחום שלמות סופי, הראו שבהכרח R שדה (רמז: תרגמו לטענה שראינו על תנאי מספיק לכך שמונואיד הוא חבורה).

   פתרון: מספיק להראות ש $R\setminus\{0\}$ היא חבורה ביחס לכפל. בגלל ש R תחום שלמות, נקבל ש $R\setminus\{0\}$ מונואיד עם צמצום, כיוון שאם $ab=ac$ אזי $a(b-c)=ab-ac=0$ ואז כיוון ש $a\in R\setminus\{0\}$ אז $a\neq 0$ ולכן $b-c=0$, כלומר $b=c$.
   ראינו בתרגול שמונואיד עם צמצום הוא חבורה, ולכן קיבלנו את הדרוש.
2. הוכח או הפרך:
   a. אם I אידיאל אזי הקבוצה $S=\{1-a : a\in I\}$ סגורה לכפל (כלומר לכל $x,y\in S$ מתקיים $xy\in S$).

      פתרון: נוכיח

      $(1-a)(1-b)=1-b-a+ab$, ומתקיים $a,b,ab\in I$ ולכן $b+a-ab\in I$. לכן $(1-a)(1-b)\in S$.
   b. $R(a+b)=Ra+Rb$ לכל a,b בחוג R.

      פתרון: נפריך

      $6\mathbb{Z}=(2+4)\mathbb{Z}\neq 2\mathbb{Z}+4\mathbb{Z}=2\mathbb{Z}$
   c. איחוד של אידיאלים הוא אידיאל.

      פתרון: נפריך

      $S=2\mathbb{Z}\cup 3\mathbb{Z}$ אינו אידאל. $3\in S,-2\in S$ אבל $1=3-2\notin S$.
   d. יהיו $R\subseteq S$ חוגים ויהי $I\lhd R$, אזי $I\lhd S$.

      פתרון: $2\mathbb{Z}\lhd\mathbb{Z}$ אבל $2\mathbb{Z}\ntriangleleft\mathbb{Q}$, כיוון ש $\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}\notin 2\mathbb{Z}$.
3. קבעו האם קיים הומומורפיזם $\varphi: R\to S$ (לאו דוקא יוניטרי) $\varphi\not\equiv 0$, כאשר:
   a. $R=\mathbb{Z}_n$ ו $S=\mathbb{Z}_m$ כאשר $m\mid n$.

קיים. נגדיר $\varphi(a)=a\,(\mathrm{mod\,m})$. יש להראות שהפונקציה מוגדרת היטב,

כלומר לא תלויה בבחירת נציג a. ניקח $b=a+kn$.

$\varphi(a+kn)=a+kn\ (\mathrm{mod}\,m)=a+k\cdot 0\ (\mathrm{mod}\,m)=a\,(\mathrm{mod}\,m)=\varphi(a)$.

השיוויון השני משמאל נכון כי $m\,|\,n$.

נשאר להראות ש φ כפלית וחיבורית, אבל זה ברור כי $\mathrm{mod}\,m$ היא חיבורית וכפלית.

b. $R=\mathbb{Z}_n$ ו $S=\mathbb{Z}_m$ כאשר $n\,|\,m$ וגם $0<m\neq n$.

פתרון: נפריך. נקח $R=\mathbb{Z}_2$ ו- $S=\mathbb{Z}_4$

אם קיים φ אזי $\varphi(1)\neq 0$ אחרת $\varphi=0$ (מדוע?).

אם $\varphi(1)=1$ אזי $0=\varphi(0)=\varphi(2)=\varphi(1+1)=\varphi(1)+\varphi(1)=1+1=2$, סתירה.

אם $\varphi(1)=3$ אזי בצורה דומה נקבל $0=6$, סתירה.

אם $\varphi(1)=2$ אזי

$2=\varphi(1)=\varphi(1\cdot 1)=\varphi(1)\varphi(1)=2\cdot 2=4=0$ סתירה.

4. נביט בחוג הפולינומים $R[x]$ מעל תחום שלמות R. האם I אידיאל כאשר

a. $I=\{f\in R[x]:\ f(137)=0\}$

פתרון:

אם $g\in R[x]$ אזי $(fg)(137)=f(137)g(137)=f(137)0=0$.

בנוסף אם $f,g\in I$

$(f+g)(137)=f(137)+g(137)=0$.

b. $I=\{f\in R[x]:\ f(1)=10\}$

פתרון:

ניקח את הפונקציה הקבועה $f=10$. אזי $f\in I$.

$I\ni f+f=20\notin I$, סתירה.

c. $I=\{f\in R[x]:\ f(0)=0\}$

פתרון:

מראים ש I אידאל באותה צורה שהראינו ב א.

5. יהי R חוג קומוטטיבי. יהי $a \in R$. הראו שאם $Ra = R$ אזי a הפיך.

פתרון: מתקיים $1 \in R \Rightarrow 1 \in Ra$ לכן קיים $b \in R$ כך ש $1 = ba$ (ולפי קומוטטיביות נקבל גם הפכיות מימין, ולכן a הפיך).

6. יהי R תחום שלמות פשוט (חוג פשוט הוא חוג ללא אידאלים דו-צדדיים לא טריויאליים, כלומר כל אידאל דו-צדדי ב R הוא $\{0\}$ או R). הראו שבהכרח R שדה.

פתרון: Ra הוא אידאל לכל $0 \neq a \in R$, וכיוון ש $Ra \neq \{0\}$ נקבל $Ra = R$ כי החוג פשוט, ואז לפי 5 נקבל ש a הפיך, כלומר כל איבר שונה מאפס הפיך, ולכן R שדה.