מד"ר - תרגול 4

14 באוגוסט 2011

המשך הורדת סדר משוואות מסדר 2

דרכים לפתרון

1. כאשר חסר y במשוואה, הצבה מהצורה $y^{(k)} = z$ כאשר k היא הנגזרת הנמוכה ביותר המופיעה.
2. כאשר חסר x:
$$y^{'} = z\left(y\right), \, y^{''} = z \cdot \frac{dz}{dy}$$
3. כאשר ידוע פתרון פרטי מהצורה $y = y_p$ נציב $y = y_p \cdot u\left(x\right)$.
4. משוואת ריקטי הינה משוואה מהצורה
$$y^{'} = a\left(x\right) \cdot y^2 + b\left(x\right) y + c\left(x\right)$$
נפתור ע"י הצבה $y = y_p + u\left(x\right)$ כאשר y_p הוא פתרון פרטי.
לאחר ההצבה נקבל משוואה שאפשר להציגה כמשוואת ברנולי.
5. משוואת לגרנז' זו משוואה מהצורה:
$$y = x \cdot F\left(p\right) + G\left(p\right)$$
נציב:
$$\frac{dx}{dp} = \frac{xF^{'}\left(p\right) + G^{'}\left(p\right)}{p - F\left(p\right)}$$

דוגמה 1

פתור את המד"ר הבאות:

1.
$$x \cdot \frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

נשים לב כי הנגזרת הנמוכה ביותר שנמצאת במשוואה היא מסדר 2. לכן, לפי סעיף 1 נציב $z(x) = y^{''}$:

$$\begin{aligned} x \cdot z^{'} - 2z &= 0 \\ \frac{z^{'}}{z} &= \frac{2}{x} \\ \ln(z) &= 2\ln x \\ z &= cx^2 \\ y^{''} &= cx^2 \\ y &= c_1x^4 + c_2x + c_3 \end{aligned}$$

.2

$$y^{''} = \left(y^{'}\right)^3 + y^{'}$$

נשים לב שאין x במשוואה לכן לפי מקרה 2 נציב

$$\begin{aligned} y^{'} &= z(y) \\ y^{''} &= \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot z \end{aligned}$$

נציב חזרה ונקבל

$$\begin{aligned} z \cdot \frac{dz}{dy} &= z^3 + z \\ \frac{dz}{dy} &= z^2 + 1 \\ \frac{dy}{dz} &= \frac{1}{z^2+1} \\ \int dy &= \int \frac{dz}{z^2+1} \\ y + c &= \arctan(z) \\ z &= \tan(y+c) \\ y^{'} &= \tan(y+c) \\ \frac{dx}{dy} &= \cot(y+c) \\ \int dx &= \int \cot(y+c)\,dy \\ x + c_1 &= \ln(\sin(y+c)) \\ c_1e^x &= \sin(y+c_2) \\ y &= \arcsin(c_1e^x) + c_2 \end{aligned}$$

נשים לב שצריך לבדוק פתרון סינגולרי עבור $z = 0$ כלומר $y = c$ קבוע, וזה אכן פתרון סינגולרי.

.3 פתור:

$$(1-2x)\,y^{''} + 4xy^{'} - 4y = 0$$

נחפש פתרון פרטי. רוצים להשתמש בהצבה $y=y_p\cdot u(x)$.
תחילה נחפש פתרון פרטי ע"י איפוס אחת מהנגזרות. ברור שאם נבחר $y=ax$
אז $y^{''}=0$. קל לראות שאכן זה מתקיים (לכל a), ניקח $y_p=x$.
ההצבה המתבקשת היא:

$$\begin{aligned} y &= x\cdot u(x) \\ y^{'} &= u(x)+x\cdot u^{'}(x) \\ y^{''} &= u^{'}(x)+u^{'}(x)+xu^{''}(x) \end{aligned}$$

נציב חזרה במשוואה המקורית ונקבל:

$$\begin{aligned} (1-2x)\left(2u^{'}+xu^{''}\right)+4x\left(u+xu^{'}\right)-4xu &= 0 \\ 2u^{'}-4xu^{'}+xu^{''}-2x^2u^{''}+4xu+4x^2u^{'}-4xu &= 0 \\ u^{'}\left(2-4x+4x^2\right)+u^{''}\left(x-2x^2\right) &= 0 \\ \frac{u^{''}}{u^{'}} &= \frac{4x^2-4x+2}{2x^2-x} \\ \int\frac{u^{''}}{u^{'}}dx &= \int\frac{4x^2-4x+2}{2x^2-x}dx \\ \ln\left(u^{'}\right) &= \int\frac{4x^2-2x-2x+2}{2x^2-x}dx \\ &= \int 2-\frac{2x-2}{2x^2-x}dx \\ &= \int 2-\frac{2}{x}+\frac{2}{2x-1}dx \\ &= 2x-2\ln x+\ln(2x-1)+c \end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned} u^{'} &= c_1\cdot e^{2x}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right) \\ u &= \int c_1e^{2x}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)dx \\ y &= c_1x\cdot\int e^{2x}\left(\frac{2x-1}{x^2}\right)dx \end{aligned}$$

(אין פה פתרון פשוט לאינטגרל).

4. פתור:

$$y^{'}+2y^2=\frac{6}{x^2}$$

נציג את המשוואה בצורה:

$$y^{'}=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$$

כאשר

$$\begin{aligned} a(x) &= -2 \\ b(x) &= 0 \\ c(x) &= \frac{6}{x^2} \end{aligned}$$

ולכן נשתמש במשוואת ריקטי. פתרון פרטי של המשוואה הוא מהצורה $\frac{a}{x}$ ונקבל שהפתרון המתאים הוא $\frac{2}{x}$.
נציב:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2}{x}+z\left(x\right) \\ y^{'} &= -\frac{2}{x^{2}}+z^{'} \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$\begin{aligned} -\frac{2}{x^{2}}+z^{'}+2\cdot\left(\frac{2}{x}+z\right)^{2} &= \frac{6}{x^{2}} \\ -\frac{2}{x^{2}}+z^{'}+\frac{8}{x^{2}}+\frac{8z}{x}+2z^{2} &= \frac{6}{x^{2}} \\ z^{'}+2z^{2}+\frac{8z}{x} &= 0 \\ \frac{z^{'}}{z^{2}}+2+\frac{8}{zx} &= 0 \end{aligned}$$

זו משוואת ברנולי.
נציב:

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{z} \\ t^{'} &= -\frac{1}{z^{2}}z^{'} \end{aligned}$$

נציב במשוואה:

$$-t^{'}+2+\frac{8t}{x}=0$$

מכאן נפתור לפי מד"ר לינארית מסדר 1, לפי הנוסחה המתאימה מההרצאה.

5. פתור:

$$y^{'}+y=x\left(y^{'}\right)^{2}$$

זו משוואת לגרנז'. נרשום את המשוואה באופן הבא:

$$y=x\cdot\left(y^{'}\right)^{2}-y^{'}$$

נציב $y^{'}=p$ ונקבל:

$$y=xp^{2}-p$$

המשוואה היא מהצורה

$$y=x\cdot F\left(p\right)+G\left(p\right)$$

כאשר

$$\begin{aligned} F\left(p\right) &= p^{2} \\ G\left(p\right) &= -p \end{aligned}$$

אזי:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dp} &= \frac{xF^{'}(p)+G^{'}(p)}{p-F(p)}\\ &= \frac{2xp-1}{p-p^2}=2x\frac{p}{p-p^2}-\frac{1}{p-p^2}\end{aligned}$$

זו בדיוק משוואה לינארית מהצורה:

$$\begin{aligned}y^{'}+p(x)y &= q(x)\\ \frac{dx}{dp}-\frac{2}{1-p}x &= -\frac{1}{p-p^2}\\ x^{'}+M(p)x &= N(p)\end{aligned}$$

פה:

$$\begin{aligned}M(p) &= -\frac{2}{1-p}\\ N(p) &= -\frac{1}{p-p^2}\end{aligned}$$

ואז הפתרון הוא:

$$\begin{aligned}x &= e^{-\int M(p)dp}\cdot\left[\int N(p)\cdot e^{\int M(p)dp}dp+c\right]\\ &= e^{\int\frac{2}{1-p}dp}\left[-\int\frac{e^{\int-\frac{2}{1-p}dp}}{p-p^2}dp+c\right]\\ &= e^{-2\ln(1-p)}\left[-\int\frac{(1-p)^2}{p-p^2}dp+c\right]\\ &= (1-p)^{-2}\left[-\int\frac{1-p}{p}dp+c\right]\\ &= \frac{1}{(1-p)^2}\left[p-\ln(p)+c\right]\end{aligned}$$

וקיבלנו הצגה פרמטרית של $x,\,y$ לפי p:

$$\begin{aligned}x &= \frac{p-\ln p+c}{(1-p)^2}\\ y &= xp^2-p\end{aligned}$$

(אפשר להציב את x במשוואה של y ולקבל את הפיתרון בצורה מפורשת).

משפט קיום ויחידות

נתונה מד"ר מהצורה:

$$\begin{aligned}y^{'} &= f(x,\,y)\\ y(x_0) &= y_0\end{aligned}$$

בעלת התנאים $f,\,f_y$ רציפות בתחום המכיל את $x_0,\,y_0$ אז קיים פתרון מהצורה:

$$y=\phi(x)$$

והוא יחיד.

הערה

עבור מד"ר לינארית מסדר 1:

$$f\left(x,\,y\right)=-p\left(x\right)y+q\left(x\right)$$

מספיק לדרוש רציפות של $p,\,q$.
נשים לב ש $f_{y}=-p\left(x\right)$.

דוגמה 2

נתונה המשוואה:

$$\begin{cases} xy^{'}+2y-4x^{2}=0\\ y\left(1\right)=2\end{cases}$$

מצא את הפתרון והסבר מדוע אינו קיים פתרון נוסף בנק' $x=0$.

פתרון

נרשום את המשוואה באופן הבא:

$$y^{'}+\frac{2}{x}y-4x=0$$

זו משוואה לינארית מסדר 1, נפתור לפי הנוסחה:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int4x\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx}dx+c\right]\\ &= e^{-2\ln x}\left[\int4xe^{2\ln x}dx+c\right]\\ &= \frac{1}{x^{2}}\left[\int4x^{3}dx+c\right]\\ &= \frac{x^{4}+c}{x^{2}}=x^{2}+\frac{c}{x^{2}}\end{aligned}$$

נציב את תנאי ההתחלה:

$$\begin{aligned} 2 &= 1+\frac{c}{1}\\ c &= 1\end{aligned}$$

לכן הפתרון הפרטי הוא:

$$y=x^{2}+\frac{1}{x^{2}}$$

אין פתרון ב0 כיוון שהפונק' אינה רציפה שם.

דוגמה 3

מצאו פתרון למשוואה הבאה:

$$\begin{aligned} y^{'}+2y &= q\left(x\right)\\ y\left(0\right) &= 0\end{aligned}$$

כאשר $q\left(x\right)$ מוגדר באופן הבא בקטע $\left(-\infty,0\right]$

$$q\left(x\right)=\begin{cases} 1 & 0\leq x\leq1\\ 0 & x<0 \end{cases}$$

וקבע האם הפתרון יחיד.

פתרון

נחלק למקרים:

1. $0\leq x\leq1$:

$$y^{'}+2y=1$$

זו משוואה לינארית. לפי הנוסחה נקבל:

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int2dx}\left[\int e^{\int2dx}dx+c\right]\\ &= e^{-2x}\left[\int e^{2x}dx+c\right]\\ &= \frac{1}{e^{2x}}\cdot\left[\frac{1}{2}e^{2x}+c\right]\\ &= \frac{1}{2}+\frac{c}{e^{2x}} \end{aligned}$$

נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2}+\frac{c}{1}\\ c &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

לכן:

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{e^{2x}-1}{2e^{2x}}$$

2. נקבל:

$$y^{'}+2y=0$$

נפתור לפי הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned} \frac{y^{'}}{y} &= -2\\ \ln\left(y\right) &= -2x+c\\ y &= \frac{c}{e^{2x}} \end{aligned}$$

כדי שהפתרון יהיה יחיד, דרוש שנראה רציפות של הפתרון. נשתמש בתנאי ההתחלה כדי שאכן יתקיים.
נדאג שתתקיים רציפות בנק' $x = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{c}{e^{2\cdot 0}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot 0} = 0 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

קיבלנו שהפונקציה הדרושה לפתרון היא:

$$y = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & 0 < x \end{cases}$$

הנגזרת אינה רציפה ב$x = 0$ ולכן לא ניתן להסיק דבר ממשפט הקיום והיחידות (אי אפשר לדעת אם הפתרון יחיד).