

בוחר בגיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ז

16.05.17 כ' אייר ה'תשע"ז

- מרצה: פרופסור מיכאל כץ. מתרגל: אלעד עטייא.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- ענו על כל השאלות. נמקו כל תשובה.
- כל אחת מהשאלות 1,2,3 שווה 33 נקודות.

1. סווגו והביאו לצורה קנונית:

(א) את חתך החרוט $x = \frac{1}{y}$

(ב) את המשטח הריבועי $9x^2 + 5y^2 + 5z^2 + 12xy + 6xz + 5x - 6y - 3z = 2$

2. מצאו פרמטריזציה מהירות יחידה לעקומות הבאות וחשבו את העקמומיות של כל אחת מהן:

(א) $\alpha(t) = (1 + 2 \cos t, -3 + 2 \sin t)$

(ב) $\alpha(t) = (t, a \cosh(\frac{t}{a}))$ עבור $a > 0$

3. חשבו את העקמומיות של העקומות הבאות, ומצאו עבור כל אחת מהן את הנקודה (או הנקודות) בהן העקמומיות מקסימלית:

(א) $y - x^2 = 0$

(ב) $xy = 1$ כאשר $x > 0$

(ג) $3x^2 + 4y^2 = 1$

4. שאלת בונוס (3 נקודות לסעיף):

(א) מצאו עקומה (בפרמטריזציה טבעית) עם עקמומיות: $k(s) = s^2 + 1$

(ב) פשטו את הביטוי $\delta_b^a g_{ca} g^{bd} \delta_d^c$, כאשר $a, b, c, d \in \{1, 2, \dots, n\}$

נוסחאות

פונקציות היפרבוליות:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

אופרטור בייטמן:

$$D_B(F) = - \begin{vmatrix} 0 & F_x & F_y \\ F_x & F_{xx} & F_{xy} \\ F_y & F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix}$$

עקמומיות בצורה סתומה:

$$k = \left| \frac{D_B(F)}{\|\nabla F(x, y)\|^3} \right|$$