89-198 מתמטיקה בדידה – תרגול 10

עוצמות

הגדרה: תהיינה A,B קבוצות, נאמר ש A,B שקולות (או שוות עוצמה) אם קיימת פונקציה חח"ע ועל מ A ל B.
נסמן $|A| = |B|$ או $A \sim B$.
משפט: תהי U קבוצה אוניברסלית (כלומר קבוצה גדולה שמכילה את כל הקבוצות בהקשר מסוים).
אזי שיוויון עוצמות הוא יחס שקילות על $P(U)$, כלומר תהיינה $A,B,C \in P(U)$, אזי:

- רפלקסיביות: $A \sim A$ (בעזרת פונקצית הזהות).
- סימטריות: אם $A \sim B$ אזי $B \sim A$ (בעזרת הפונקציה ההפיכה).
- טרנזיטיביות: אם $A \sim B$ וגם $B \sim C$ אזי $A \sim C$ (הרכבת פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה).

זהירות: אי אפשר להתיחס לשיווין עוצמות כאל יחס שקילות על קבוצת כל הקבוצות!!!

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$, נסמן $I_n = \{i \in \mathbb{N}^+ \mid i \leq n\}$. קבוצה A נקראת סופית אם קיים $n \in \mathbb{N}$ עבורו $A \sim I_n$.
נאמר שהעוצמה (קרדינליות) של A היא n ונסמן $|A| = n$.
הערה: עבור קבוצה סופית A העוצמה של A היא מספר האברים ב A.

דוגמה: תהי $A = \{a,b,c\}$, אזי $|A| = 3$ מכיון שעבור $n = 3$ מתקיים $I_3 = \{1,2,3\}$ וניתן להגדיר $f: A \to I_3$ חח"ע ועל:
$f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3$.

דוגמה: $|\emptyset| = 0$, מכיון שעבור $n = 0$ מתקיים $I_0 = \{i \in \mathbb{N}^+ \mid i \leq 0\} = \emptyset$.
הפונקציה הריקה $f: \emptyset \to I_0$ היא חח"ע ועל.

סימון: העוצמה של $\mathbb{N}$ מסומנת $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
הגדרה: קבוצה A נקראת בת-מניה אם היא סופית או אם $|A| = \aleph_0$.
הערה: המשמעות שקבוצה היא בת-מניה היא שניתן לסדר את אבריה בשורה ולספור אותם (כמו הטבעיים).

דוגמה: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$.

$\mathbb{N}$: 0, 1, 2, 3, 4, ...
$\mathbb{N}^+$: 1, 2, 3, 4, 5, ...

הוכחה: נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ על ידי $f(n) = n + 1$. נראה ש f חח"ע ועל.
חח"ע: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ ונניח ש $f(n) = f(m)$. אזי $n + 1 = m + 1$, ולכן $n = m$.
על: יהי $n \in \mathbb{N}^+$, אזי $n - 1 \in \mathbb{N}$ ונקבל ש $f(n-1) = (n-1) + 1 = n$.

$\mathbb{N}$: 0, 1, 2, 3, 4, ...
$2\mathbb{N}$: 0, 2, 4, 6, 8, ...

דוגמה: נסמן $2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ אזי $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$.
הוכחה: נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ על ידי $f(n) = 2n$. נראה ש f חח"ע ועל.
חח"ע: יהיו $n,m \in \mathbb{N}$ ונניח ש $f(n) = f(m)$. אזי $2n = 2m$, ולכן $n = m$.
על: יהי $n \in 2\mathbb{N}$, כלומר קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $n = 2m$. נקבל ש $f(m) = 2m = n$.

$\mathbb{N}$: 0, 1, 2, 3, 4, ...
$\mathbb{Z}$: 0, 1, −1, 2, −2, ...

דוגמה: $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
הוכחה: נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ על ידי $f(n) = \begin{cases} \frac{-n}{2} : n \text{ is even} \\ \frac{n+1}{2} : n \text{ is odd} \end{cases}$. נראה ש f חח"ע ועל.

<u>חח"ע</u>: יהיו $n,m\in\mathbb{N}$ ונניח ש $f(n)=f(m)$.
אם $f(n),f(m)\le 0$ אזי $\frac{-n}{2}=\frac{-m}{2}$, אחרת $\frac{m+1}{2}=\frac{n+1}{2}$. בכל מקרה $n=m$.
<u>על</u>: יהי $m\in\mathbb{Z}$.
אם $m\le 0$, נחפש $n\in\mathbb{N}$ המקיים $\frac{-n}{2}=m$, ואכן $n=-2m\in\mathbb{N}$ והוא זוגי, לכן $f(-2m)=\frac{-(-2m)}{2}=m$.
אם $m>0$, נחפש $n\in\mathbb{N}$ המקיים $\frac{n+1}{2}=m$, ואכן $n=2m-1\in\mathbb{N}$ והוא איזוגי, לכן $f(2m-1)=\frac{(2m-1)+1}{2}=m$.
<u>משפט</u>: תהיינה A,B קבוצות. אם $|A|=|B|=\aleph_0$ אזי $|A\times B|=\aleph_0$.
<u>דוגמה</u>: $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$.
נגדיר את הפונקציה לפי האלכסונים בטבלה.

אלכסון 0 הוא $\{(0,0)\}$, אלכסון 1 הוא $\{(0,1),(1,0)\}$ וכן הלאה.

נשים לב שבאלכסון מספר k יש $k+1$ זוגות סדורים, וסכום הרכיבים בכל זוג סדור הוא k.

כלומר אברי האלכסון הם $(i,k-i)$ עבור $0\le i\le k$.

בכל אלכסון נסדר את האברים לפי הרכיב השמאלי.

$\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$	0	1	2	3	…
0	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	…
1	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	…
2	(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$\mathbb{N}$: 0, 1, 2, 3, 4, 5, …
$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$: (0,0), (0,1), (1,0), (0,2), (1,1), (2,0), …

נגדיר $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$
נשים לב שזוג סדור (n,m) נמצא על אלכסון $n+m$, לכן על מנת להגיע אליו צריך לעבור על אברי כל האלכסונים שקודמים לו, כלומר אלכסונים $0,1,\dots,n+m-1$. באלכסון i יש $i+1$ אברים.
כעת צריך להתקדם n אברים על האלכסון. לכן נגדיר את הפונקציה בצורה הבאה

$$f\big((n,m)\big)=\sum_{i=0}^{n+m-1}(i+1)+n=\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}+n$$

ניתן להוכיח באינדוקציה שהפונקציה חח"ע ועל.

<u>משפט</u>: אם $|A|=|C|$ ו $|B|=|D|$ אז:
1) $|A\times B|=|C\times D|$
2) אם $A\cap B=C\cap D=\emptyset$ אז $|A\cup B|=|C\cup D|$.

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B,C,D קבוצות לא ריקות. הוכח או הפרך:
1) אם $|A\times B|=|C\times D|$ ו $|A|=|C|$ אזי $|B|=|D|$.
2) אם $A\cap B=C\cap D=\emptyset$, $A\cup B=C\cup D$ ו $|A|=|C|$, אזי $|B|=|D|$.
<u>פתרון</u>:
1) לא נכון, נראה דוגמה נגדית. $A=B=C=\mathbb{N}$ ו $D=\{1\}$.
$|A\times B|=|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=\aleph_0$.
$|C\times D|=|\mathbb{N}\times\{1\}|=\aleph_0$. הפונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\{1\}$ המוגדרת ע"י $f(n)=(n,1)$ היא חח"ע ועל.
אך $|\mathbb{N}|\ne|\{1\}|$.
2) לא נכון, נראה דוגמה נגדית.

נגדיר שתי חלוקות של $\mathbb{N}$ - חלוקה אחת לזוגיים ואי זוגיים וחלוקה שניה למספרים חיוביים ולאפס.

$A=2\mathbb{N}$, $B=\{\,2n+1\mid n\in\mathbb{N}\,\}$, $C=\mathbb{N}^+$ ו $D=\{0\}$.

אזי $A\cap B=C\cap D=\emptyset$, $|A|=\aleph_0=|C|$ ו $A\cup B=\mathbb{N}=C\cup D$.

אולם $|B|=\aleph_0$ ו $|D|=1$ ולכן $|B|\ne|D|$.

<u>תרגיל</u>: תהיינה A,B קבוצות. הוכח או הפרך:
1) אם $|A \setminus B| = |B \setminus A|$ אזי $|A| = |B|$.
2) אם $|A| = |B|$ אזי $|A \setminus B| = |B \setminus A|$.

<u>פתרון</u>:
1) נכון. $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, לכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: A \setminus B \to B \setminus A$.
נגדיר פונקציה $g: A \to B$ על ידי $g(a) = \begin{cases} f(a): a \notin B \\ a \quad : a \in B \end{cases}$.
<u>חח"ע</u>: יהיו $a_1, a_2 \in A$ ונניח ש $g(a_1) = g(a_2)$.
אם $a_1, a_2 \in B$ נקבל ש $g(a_1) = a_1$ ובנוסף $g(a_2) = a_2$, לכן $a_1 = a_2$.
אם $a_1, a_2 \notin B$ אזי $f(a_1) = f(a_2)$, ומכיון ש f חח"ע נקבל ש $a_1 = a_2$.
אחרת, נניח בלי הגבלת הכלליות ש $a_1 \in B, a_2 \notin B$ (הכוונה היא שהמקרה שבו $a_2 \in B, a_1 \notin B$ הוא סימטרי),
אזי $g(a_1) = a_1 \in A$, אך $g(a_2) = f(a_2) \notin A$ ונקבל סתירה ל $g(a_1) = g(a_2)$.
<u>על</u>: יהי $b \in B$.
אם $b \in A$, אזי $g(b) = b$.
אם $b \notin A$, אזי $b \in B \setminus A$ ומכיון ש f על קיים $a \in A \setminus B$ כך ש $f(a) = b$, נקבל ש $g(a) = f(a) = b$.
2) לא נכון.עבור $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{N}^+$ נקבל $|A| = |B|$, אולם $A \setminus B = \{0\}$ ו $B \setminus A = \emptyset$, ומתקיים $|\{0\}| \neq |\emptyset|$.

<u>תרגיל</u>: הוכח שאם $|A| = |B|$ אזי $|P(A)| = |P(B)|$.
<u>הוכחה</u>: $|A| = |B|$ ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: A \to B$.
נגדיר פונקציה $g: P(A) \to P(B)$ בצורה הבאה: עבור $A_1 \in P(A)$ נגדיר $g(A_1) = f(A_1)$
(זהירות: $f(A_1) = \{f(a) \mid a \in A_1\} \subseteq B$ היא תת קבוצה של B, ואילו $g(A_1)$ היא התמונה של A_1 לפי הפונקציה g).
נשים לב שאכן $g(A_1) \in P(B)$. נראה ש g חח"ע ועל:

<u>חח"ע</u>: תהיינה $A_1, A_2 \in P(A)$, ונניח בשלילה ש $A_1 \neq A_2$ אולם $g(A_1) = g(A_2)$, כלומר $f(A_1) = f(A_2)$.
מכיון ש $A_1 \neq A_2$ נניח בלי הגבלת הכלליות שקיים $a_1 \in A_1 \setminus A_2$ (כלומר המקרה שקיים $a_1 \in A_2 \setminus A_1$ הוא סימטרי).
נסמן $b = f(a_1)$, אזי $b \in f(A_1)$.
מכיון ש $f(A_1) = f(A_2)$, נובע ש $b \in f(A_2)$, לכן קיים $a_2 \in A_2$, עבורו $f(a_2) = b$.
מכיון ש $a_1 \notin A_2$ בהכרח $a_1 \neq a_2$, אולם $f(a_1) = f(a_2)$ וזו סתירה לחח"ע של f.

<u>על</u>: תהי $B_1 \in P(B)$.
נסתכל על התמונה ההפוכה של B_1, $A_1 = f^{-1}(B_1) = \{a \in A \mid f(a) \in B_1\}$, אזי $A_1 \in P(A)$.
נראה ש $f(A_1) = B_1$.
יהי $x \in f(A_1)$, אזי קיים $y \in A_1$ כך ש $f(y) = x$, אולם לכל $y \in A_1$ מתקיים $f(y) \in B_1$ ולכן $x \in B_1$.
יהי $x \in B_1$, מכיון ש f על קיים $y \in A$ כך ש $f(y) = x$. מהגדרת A_1 נובע ש $y \in A_1$ ולכן $x = f(y) \in f(A_1)$.

<u>הגדרה</u>: עבור $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $a < b$.

קטע פתוח הוא קבוצה מהצורה $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$.

קטע סגור הוא קבוצה מהצורה $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$.

קטע חצי פתוח הוא קבוצה מהצורה $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ או $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$.

קרן פתוחה חיובית היא קבוצה מהצורה $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a < x\}$.

קרן סגורה חיובית היא קבוצה מהצורה $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x\}$.

קרן פתוחה שלילית היא קבוצה מהצורה $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$.

קרן סגורה שלילית היא קבוצה מהצורה $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq b\}$.

תרגיל: הוכח שעוצמתם של כל שני קטעים פתוחים על הישר הממשי שווה.
כלומר עבור $a < b, c < d$ מתקיים $|(a,b)| = |(c,d)|$

הוכחה:

נראה שעבור $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $a < b$ מתקיים $|(a,b)| = |(0,1)|$.
נגדיר פונקציה $f: (0,1) \to (a,b)$ על ידי $f(x) = a + (b-a)x$
(זו משוואת הקו הישר העובר בנקודות $(0,a), (1,b)$).
חח"ע: יהיו $x, y \in (0,1)$, ונניח ש $f(x) = f(y)$. אזי $a + (b-a)x = a + (b-a)y$, כלומר $x = y$.
על: יהי $y \in (a,b)$. נחפש $x \in (0,1)$ המקיים $y = a + (b-a)x$.
מכיון ש $a < b$, בהכרח $b - a \neq 0$ ונקבל ש $x = \frac{y-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
בנוסף מכיון ש $y \in (a,b)$ נקבל $y - a < b - a$ וגם $0 = a - a < y - a$ לכן נקבל $\frac{y-a}{b-a} \in (0,1)$.
כעת מתקיים $f\left(\frac{y-a}{b-a}\right) = a + (b-a)\frac{y-a}{b-a} = a + y - a = y$.

קיבלנו שלכל קטע פתוח מתקיים $|(a,b)| = |(0,1)|$.
מהטרנזיטיביות נובע שלכל שני קטעים פתוחים $|(a,b)| = |(c,d)|$

תרגיל: הוכח ש $\left|\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\mathbb{R}|$
הוכחה: נגדיר פונקציה $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ על ידי $f(x) = tan(x)$.
קיימת לה פונקציה הופכית $arctan(x): \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, לכן היא חח"ע ועל.

מסקנה: $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$.
הגדרה: העוצמה של $\mathbb{R}$ נקראת עוצמת הרצף ומסומנת $|\mathbb{R}| = א$.

תרגיל: הוכח ש $|[0,1]| = |[0,1)|$.
רעיון ההוכחה: הוא להסתכל על תת הקבוצה $[0,1) \supseteq \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}\right\}$.
את תת הקבוצה הזו נמפה לתת הקבוצה $[0,1] \supseteq \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\right\}$.
את שאר האברים נשאיר במקום בעזרת פונקציה הזהות.

הוכחה:

נגדיר פונקציה $f: [0,1) \to [0,1]$ על ידי

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}: & \exists n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}, x = \dfrac{1}{n} \\ x: & otherwise \end{cases}$$

חח"ע: יהיו $x, y \in [0,1)$ ונניח ש $f(x) = f(y)$.
אם $f(x) = \frac{1}{n-1}$ עבור $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$ כלשהו, אזי מתקיים $x = y = \frac{1}{n}$.
אחרת, מתקיים $f(x) = x$ ו $f(y) = y$, לכן $x = y$.
על: יהי $y \in [0,1]$.
אם $y = \frac{1}{n}$ עבור $n \in \mathbb{N}^+$ כלשהו, אזי $\frac{1}{n+1} \in [0,1)$ ומתקיים $n + 1 \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\}$. נקבל ש

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1-1} = \frac{1}{n} = y$$

אחרת, בפרט $y \neq 1$ ולכן $y \in [0,1)$ ומתקיים $f(y) = y$.