פתרון תרגיל 3 אינפי 3

17 בנובמבר 2015

1. נניח בשלילה שהחיתוך אינו ריק. לכן:

$$\mathbb{R}^n = \emptyset^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$$

לפי דה־מורגן, ולכן $X \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i^c$. X קומפקטי, והקבוצות A_i^c פתוחות (כי המשלימות שלהן סגורות) ולכן קיים תת־כיסוי סופי של X:

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^{s} A_{i_k}^c$$

מצד שני, $X \supseteq \bigcap A_{i_k} \neq \emptyset$ כי החיתוך סופי, כלומר קיים $x \in \bigcap A_{i_k}$ אלא שאז $x \in X$ ולכן גם:

$$x \in \bigcup A_{i_k}^c = \left(\bigcap A_{i_k}\right)^c$$

וסתירה! לכן החיתוך אינו ריק.

2. נשתמש בכך שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה והפנים היא הפתוחה המקסימלית שמוכלת.

(א) נוכיח.$A\cap B \subseteq A \subseteq cl\left(A\right), A\cap B\subseteq B\subseteq cl\left(B\right)$ ולכן:

$$A\cap B \subseteq cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$$

מכיוון שהקבוצות $cl\left(A\right), cl\left(B\right)$ סגורות, גם $cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$ סגורה, ומכיוון שהיא מכילה את $A\cap B$ והסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה, נקבל שאכן:

$$cl\left(A\cap B\right) \subseteq cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)$$

(ב) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A=(0,1)\,,B=(1,3)$ ב־$\mathbb{R}$. מכיוון שהחיתוך ריק, גם $cl\left(A\cap B\right)=\emptyset$. מאידך גיסא,

$$cl\left(A\right)=\left[0,1\right],cl\left(B\right)=\left[1,3\right]\Longrightarrow cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)=\left\{1\right\}$$

ולכן $cl\left(A\right)\cap cl\left(B\right)\nsubseteq cl\left(A\cap B\right)$.

(ג) נפריך. נתבונן בקבוצות: $A=\left[0,1\right],B=\left[1,3\right]$ ב־$\mathbb{R}$. מצד אחד,

$$int\left(A\right)=\left(0,1\right),int\left(B\right)=\left(1,3\right)\Longrightarrow int\left(A\right)\cup int\left(B\right)=\left(0,3\right)\setminus\left\{1\right\}$$

ומצד שני:

$$A\cup B=\left[0,3\right]\Longrightarrow int\left(A\cup B\right)=\left(0,3\right)$$

ולכן $int\left(A\cup B\right)\nsubseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$.

(ד) נוכיח. $int\left(A\right)\subseteq A\subseteq A\cup B, int\left(B\right)\subseteq B\subseteq A\cup B$ ולכן:

$$int\left(A\right)\cup int\left(B\right)\subseteq A\cup B$$

מכיוון שהקבוצות $int\left(A\right),int\left(B\right)$ פתוחות גם $int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$ פתוחה ומכיוון שהיא מוכלת ב־$A\cup B$ והפנים הוא הפתוחה המקסימלית שמוכלת, נקבל:

$$int\left(A\cup B\right)\supseteq int\left(A\right)\cup int\left(B\right)$$

3. שוב, נשתמש בכך שהסגור הוא הסגורה המינימלית שמוכלת.

(א) נשתמש בהכלה דו־כיוונית. מתקיים: $B\left(a,r\right)\subseteq B\left[a,r\right]$. הכדור הסגור הוא קבוצה סגורה ומכיוון שסגור היא הסגורה המינימלית שמכילה,

$$cl\left(B\left(a,r\right)\right)\subseteq B\left[a,r\right]$$

הכיוון הזה נכון בכל מרחב מטרי.

תהי $x \in B[a,r]$. נראה שהיא נקודת הצטברות של $B(a,r)$ ואז לפי משפט $x \in cl(B(a,r))$.

אם כן, $\|x-a\| \leq r$. נתבונן באיברים מהצורה:

$$x_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)x + \frac{a}{n}$$

לכל $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. מתקיים: $\|x_n - x\| = \frac{1}{n}\|x-a\| \leq \frac{r}{n} < r$ ולכן $x_n \in B(0,1)$.

לכל r_0 קיים n עבורו $\frac{r}{n} \leq r_0$ ולכן לכל r_0 קיים $x_n \in B(x,r_0)$ ולכן x נקודת הצטברות של $B(a,r)$.

לכן $x \in cl(B(a,r))$ ולכן $B[a,r] \subseteq cl(B(a,r))$ ובסך הכל הוכחנו את הדרוש.

(ב) נבחר $X = \{a,b\}$ קבוצה עם שני איברים שונים ועם המטריקה הדיסקרטית: $d(a,b)=1$.

מתקיים: $B(a,1) = \{a\}$. זו קבוצה סגורה (כמו כל קבוצה במרחב דיסקרטי) ולכן $cl(B(a,1)) = \{a\}$.

מצד שני, $B[a,1] = X$.

4. לא. נתבונן בקבוצה $\mathbb{Q}$ ב$-\mathbb{R}$. מצד אחד $cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$ (חשבו מהן נקודות ההצטברות של $\mathbb{Q}$) ומצד שני:

$$cl(int(\mathbb{Q})) = cl(\emptyset) = \emptyset$$

5. נתון ש$-A,B$ קשירות.

(א) לא בהכרח. נתבונן בזוג הכדורים הסגורים ב$-\mathbb{R}^2$:

$$A = B[0,1], B = B[2,1]$$

ובאיחוד שלהם $A\cup B$. החיתוך של הכדורים לא ריק ולכן (ממשפט) גם האיחוד קשיר.

עם זאת, הפנים של האיחוד הוא הקבוצה:

$$int\left(A\cup B\right)=B\left(0,1\right)\cup B\left(2,1\right)$$

וזו אינה קבוצה קשירה.

(ב) אותה דוגמה כמו בסעיף הקודם תעבוד גם כאן.

6. נוכיח זאת. יהיו $x,y\in\mathbb{R}^2\backslash A$ ונראה שיש ביניהן מסילה, פונקציה רציפה כנדרש.

אם $x=y$, קיימת ביניהן מסילה - פונקציה קבועה.

אם $x\neq y$, מכיוון שעוצמת כל הישרים העוברים דרך x היא $\aleph$, קיים ישר l_x שעובר דרך x ולא עובר באף נקודה מ$-A$ (זכרו שכל ישר נקבע על ידי שתי נקודות בצורה יחידה).

באופן דומה, קיים ישר l_y העובר דרך y ולא עובר באף נקודה מ$-A$, ובנוסף שיפועו שונה משיפועו של l_x.

לכן, l_x,l_y נחתכים בנקודה שנסמנה ב$-z$. המסילה שלנו תהיה הקטע מ$-x$ עד לנקודת החיתוך והקטע מנקודת החיתוך עד ל$-y$.

מעט יותר פורמלית, המסילה היא הפונקציה γ המעתיקה את הקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ לקטע שבין x לבין z, ואת הקטע $\left[\frac{1}{2},1\right]$ לקטע שבין z לבין y.